Université de Montréal

Sur des propriétés des fonctions réelles arbitraires et leurs généralisations

par

Hugues Gilbert

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

le 12 mai 2004

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Sur des propriétés des fonctions réelles arbitraires et leurs généralisations

présenté par

Hugues Gilbert

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Norbert Schlomiuk

(directeur de recherche)

Martin Goldstein

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Ce mémoire présente, dans un premier temps, une synthèse de l'évolution des notions de fonction, de continuité et de continuité à la Darboux. Ensuite, le coeur du travail porte sur l'étude de plusieurs propriétés communes à des fonctions arbitraires réelles de variables réelles. Les propriétés présentées sont principalement relatives à la continuité, à la fonction oscillation, à la continuité à la Darboux, aux fonctions mesurables et intégrables, ainsi qu'aux limites et aux points limites. L'origine de ces résultats pour les fonctions réelles arbitraires provient principalement d'articles d'Henry Blumberg, de travaux d'Alexandre Froda, de nombreux textes de Waclaw Sierpinski et également, de plusieurs publications de Solomon Marcus. Par contre, le présent texte ne présente pas nécessairement les résultats directement pour des fonctions réelles. En effet, certains résultats provenant des auteurs cités plus haut ont été généralisés.

Mots clés :

Analyse, Évolution de la notion de fonction, Fonctions arbitraires, Continuité, Continuité à la Darboux, Fonction oscillation.

SUMMARY

This memoir presents at first a synthesis of the evolution of the notions of function, continuity and Darboux continuity. Then, the heart of the work concerns the study of several properties common to arbitrary real functions of real variables. The presented properties are mainly relative to continuity, oscillation function, Darboux continuity, measurable and integrable functions, as well as limits and limit points. The origin of these results for the arbitrary real functions come mainly from Henry Blumberg's articles, from some works of Alexandre Froda, from Waclaw Sierpinski's texts and also, from several Solomon Marcus's publications. On the other hand, the present text does not necessarely present the results directly for real functions, given that certain theorems resulting from authors quoted above were generalized.

Keywords :

Analysis, Evolution of the notion of function, Arbitrary functions, Continuity, Darboux continuity, Oscillation function.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. Norbert Schlomiuk. Sans lui, l'aboutissement de ce travail aurait été impossible. Je le remercie de m'avoir proposé un sujet aussi riche et intéressant, d'avoir eu confiance en mes capacités tout au long de mon travail de recherche et de la rédaction de ce mémoire. D'ailleurs, grâce à la riche culture mathématique de mon directeur, j'ai pu en apprendre davantage sur les hommes qui se cachent derrière les résultats sur lesquels j'ai eu à travailler.

Je veux également remercier le F.C.A.R. de m'avoir supporté financièrement tout au long de mes études de deuxième cycle.

Je tiens aussi à remercier Sébastien Manka et Rony Touma, les deux étudiants qui ont co-administré le laboratoire d'informatique au département durant mon séjour à la maîtrise. Ils m'ont apporté une précieuse aide avec le logiciel LATEX. Également, merci à tous les étudiants du département qui m'ont encouragé de près ou de loin durant mes études.

Finalement, je n'oublie pas mes parents, ma famille et mes amis qui, même s'ils n'avaient aucune idée de la nature de mon travail, ont toujours été là pour me supporter moralement. Ils ont toujours crû en mes capacités de réussir ce grand défi.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Nous convenons aujourd'hui de définir une fonction $f : X \to Y$ comme étant une règle de correspondance associant à tout $x \in X$, un unique élément $y \in Y$. Nous pourrions nous demander s'il est possible de trouver des propriétés qui seraient communes par exemple, à toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, même les plus «sauvages». A priori, notre intuition nous porte à penser que ceci est impossible. D'ailleurs, comme Alexandre Froda le mentionne dans sa thèse publié en 1929, *«on a douté parfois s'il peut exister des propriétés communes à toutes les fonctions à moins qu'elles ne se réduisent à des tautologies».* ([F-1], p.3) Pourtant, Froda a fait démentir cette idée en démontrant dans sa thèse que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un nombre de discontinuités de première espèce au plus dénombrable.

Dans le cadre de ce travail, nous allons présenter plusieurs propriétés communes à des fonctions réelles arbitraires de variables réelles qui ont été trouvées par M. Froda, mais également par Blumberg, Sierpinski et Marcus. Avant d'arriver aux propriétés proprement dites, nous motivons la présentation de ce mémoire par une synthèse de l'évolution de la notion de fonction. À travers cette introduction historique, nous tracerons également l'évolution de la notion de continuité qui revient dans l'étude de plusieurs propriétés présentées plus loin. Ce premier chapitre s'achèvera par la présentation de l'évolution de la notion de propriété de la valeur intermédiaire qui sera également très présente dans le chapitre 4.

Le chapitre 2 est basé sur les principales propriétés amenées par Henry Blumberg pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconques. Les deux premières sections de ce chapitre culminent respectivement par la généralisation de résultats relatifs à la continuité et à la quasi-continuité au sens de Blumberg. La troisième section présente quant à elle une propriété commune à des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quelconques dont les applications recoupent des résultats trouvés par d'autres mathématiciens. Le chapitre 3 s'appuit sur les principales contributions de Froda à notre sujet. La première section introduit une généralisation du théoreme relatif aux discontinuités de première espèce dû à Esanu et nous démontrons ensuite la réciproque de cette généralisation. Dans la section suivante, nous généralisons un théorème relatif aux points limites d'une fonction quelconque. Dans les deux dernières sections, suite à une définition étendue de la fonction oscillation que nous avons établie, il nous sera possible d'étendre les classifications de discontinuités imaginées par Froda et par le fait même, les résultats qu'il avait établi à partir de ces classifications.

La première section du chapitre 4 regroupe trois démonstrations distinctes du théorème de Lindenbaum-Sierpinski et la deuxième section contient une quatrième démonstration pour un cadre plus général que la droite réelle. Cette section contient également d'autres propriétés relatives aux fonctions continues à la Darboux. La troisième section généralise un résultat de Marcus en utilisant une définition de fonction continue à la Darboux imaginée par Neugebauer. Ensuite, la première partie du chapitre 5 présente deux propriétés des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconques relatives aux fonctions mesurables et intégrables, dont nous avons simplifié les démonstrations. La section suivante généralise un théorème de Saks et de Sierpinski relatif aux fonctions mesurables et la dernière section présente des applications de ce théorème. Mentionnons finalement que des notions préalables à la compréhension des résultats seront présentées sous forme de rappels au fur et à mesure que nous en aurons besoin dans le texte.

NOTATION

Afin d'éviter toute confusion, voici quelques notations que nous utiliserons dans le texte de ce mémoire.

Notation 0.0.1. Soit X un espace topologique et soit $x \in X$. Afin d'alléger le texte, on utilisera la notation $\mathcal{V}(x)$ pour représenter l'ensemble de tous les voisinages de x.

Notation 0.0.2. Soit X un espace topologique et soit $A \subset X$. On utilisera la notation $\overline{A}$ pour représenter l'adhérence de A.

Notation 0.0.3. Soit X un espace métrique et soit $x_0 \in X$. On utilisera la notation $B_r(x_0)$ pour désigner la boule de rayon r centrée en x_0.

Chapitre 1

ÉVOLUTION DE LA NOTION DE FONCTION ET DE CONCEPTS D'ANALYSE ASSOCIÉS

1.1. ÉVOLUTION DES CONCEPTS DE FONCTION ET DE CONTINUITÉ

1.1.1. De l'Antiquité à la Renaissance

Selon Youschkevitch [Y], différents auteurs ne s'entendent pas sur l'époque où est apparu le concept de fonction. Pour certains, la véritable idée de fonctionnalité est apparue avec les travaux de Descartes. Pour d'autres, ce n'est que plus tard que la notion de fonction fut véritablement exprimée. En revanche, même si les scientifiques issus des grandes civilisations de l'Antiquité n'avaient aucune idée du concept de fonction, les historiens s'entendent tous pour dire qu'on retrouve les origines de cette notion dans cette période de l'histoire, puisqu'on y étudiait déjà certains cas de dépendance entre deux quantités. Dès les années 2000 av. J.-C., les Babyloniens utilisaient des tables de calculs, notamment de racines carées et cubiques. De plus, ils utilisaient des tables pour des calculs d'astronomie. Ainsi, déjà à cette époque, le concept de table de valeurs faisait son apparition. Plus tard, des traces de la notion de fonction firent également apparition chez les Grecs. En effet, les Pythagoriciens déterminaient des lois mathématiques simples dans le domaine de l'acoustique. De plus, plusieurs mathématiciens grecs se sont attardés à des problèmes impliquant des lieux géométriques (particulièrement des sections coniques) qui ont menés à la schématisation et à la description de premières courbes. Cependant, le symbolisme des Grecs de cet époque était déficient :

«*Greek symbolism until about the third century A.D., ..., confined itself to denoting various quantities by different letters of the alphabet. No algebraic formula, no kind of literal algorithm, no analytical expression was ever introduced.*» ([Y], p.41).
Par contre, l'apport des Grecs est non négligeable et il a eu une grande influence au 16e et au 17e siècle dans la création de la géométrie analytique et du calcul différentiel. Même si la notion de fonction leur était inconnue, les Grecs avaient déjà une idée de la notion de variable. En effet, plusieurs problèmes de mouvement furent considérés notamment par Héraclite, Zénon d'Élée et Aristote.

Après la chute de l'Empire romain en 476, ce sont les Arabes qui ont pris le relais du développement scientifique. Par contre, «*Arabic culture did not, as far as is known, bring about essentially new developments in functionnality.*» ([Y], p. 45) Il faut néanmoins reconnaître que sous l'influence arabe, le nombre d'expressions mathématiques augmenta et les principales lois trigonométriques firent leur apparition. Plus tard, durant le 14e siècle, alors que les activités scientifiques avaient lentement repris plus de vigueur en Europe, plusieurs équations algébriques du domaine de la géométrie et de la mécanique ont fait leur apparition, mais seulement sous forme graphique ou verbale. À cette époque, les écoles de philosophie naturelle d'Oxford et de Paris considéraient les mathématiques comme étant l'instrument principal permettant d'étudier et de décrire les phénomènes scientifiques. En Angleterre, on commençait à développer particulièrement la cinématique et donc, on étudiait des phénomènes faisant intervenir le temps. Déjà, on avait une idée des notions de variable indépendante et variable dépendante. Par contre, selon Youschkevitch, le rôle des écoles d'Oxford et de Paris n'a pas été dominant dans le développement du concept de fonction.

1.1.2. De Descartes à Johann Bernoulli

À partir de la fin du 16e siècle, l'apport de plusieurs mathématiciens permettra à la notion de fonction d'évoluer considérablement. Tout d'abord, au niveau du symbolisme, Viète utilise dès 1591, des lettres de l'alphabet pour illustrer des variables et des constantes. Ainsi, bien qu'il ne pensait pas à l'idée de fonction, il aida passablement à l'évolution de ce concept par la présentation d'équations algébriques sous des formes se rapprochant de celles que l'on connaît aujourd'hui. Le symbolisme mathématique se perfectionna davantage dans les années subséquentes notamment grâce à Descartes, Newton, Lebniz et Euler.

Dès le début du 17e siècle, l'avancement des travaux en physique amène des scientifiques à présenter des lois de la nature sous forme quantitative en établissant des relations fonctionnelles entre la « cause » (la variable indépendante) et l'«effet» (la variable dépendante). Selon Lebesgue [L-2], la physique fut la précurseure de la définition de fonction. Tranquillement, les formules analytiques font leur apparition et on assiste à l'apparition de nouvelles expressions tel le logarithme introduit par Bürgi en 1620. Ce sont Fermat et Descartes qui, de façon tout à fait indépendante, furent les premiers à appliquer des méthodes analytiques à la géométrie. D'ailleurs, selon Monna : «*Descartes, with his application of algebraic methods to geometry, opened the way for the introduction of the notion of function, which gradually developed into its modern form*» ([Mo], p.58). De plus, Descartes fut le premier mathématicien à mentionner clairement dans un texte le concept de dépendance entre deux variables liées par une expression analytique. En s'attardant aux propos suivants formulés par Youschkevitch, on peut constater que Descartes a été un acteur important dans le développement de la fonction.

«*The use of analytical expressions, the operations with which are carried out according to stricly specified rules, imparted a feature of a regular calculus to the study of functions, thus opening up entirely new horizons.*» ([Y], p.53)

Durant la seconde moitié du 17e siècle, on assista au développement des séries de puissances et à cette époque, les équations utilisées par les mathématiciens étaient toutes développables dans ce type de séries. Bien qu'à cette époque, le mot « fonction » n'était pas encore utilisé explicitement, on concevait alors les fonctions comme des expressions analytiques développables en séries de puissances.

D'ailleurs, même si Newton, aux dires de Lebesgue, est le premier à concevoir la fonction comme une correspondance entre deux ensembles, il n'a pas mis en pratique cette considération théorique dans ses textes ; il ne s'est servi que d'expressions analytiques pour décrire quantitativement des phénomènes physiques. Newton travailla beaucoup sur le mouvement et utilisa principalement le temps comme variable indépendante dans ses travaux. Les variables dépendantes étaient principalement le déplacement et la vitesse. Dans ses écrits, il a souvent fait référence à des problèmes de vitesse instantanée d'un corps pour exprimer ses vues du calcul différentiel et il créa la dérivée qu'il nomma «fluxion».

Nous savons que Newton partage son titre de père du calcul différentiel avec Leibniz qui a introduit la notion de différentielle en 1684. D'ailleurs, c'est dans un papier de Leibniz en 1673, qu'apparaît pour la première fois le mot «fonction». Par contre, ce mot «fonction» prenait différents sens dépendamment où l'on se trouvait dans le texte. C'est dans une série d'articles publiés entre 1692 et 1694 qu'il se risque à désigner une fonction comme étant des quantités géométriques (telles des tangentes) dépendant des points d'une courbe donnée. Également, il introduisit dans le vocabulaire mathématique les termes « constante », « variable », « coordonnée » et « paramètre ». À ce moment, on était bien près d'une première véritable définition de fonction et à partir de 1694, Leibniz eu une correspondance avec Johann Bernouilli qui dura jusqu'en 1698, afin de trouver un terme général qui désignerait des quantités dépendant de certaines variables. Johann Bernouilli utilisa à son tour le mot fonction pour la première fois en 1698, mais n'en donnera la véritable première définition que 20 ans plus tard. Il appela fonction «*une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes*» ([Ber] dans [Y], p.60). Ainsi, par sa définition, il ne semble associer la notion de fonction qu'à une expression analytique. Pour conclure cette section, mentionnons que Leibniz divisa les courbes et les fonctions en deux catégories. Les courbes algébriques pouvaient être représentées par des équations d'un certain degré et il classa les autres courbes comme étant des courbes transcendantes.

1.1.3. Euler et la période du 18e siècle

La notion de fonction et ses concepts associés connaîtront d'autres développements quelques années plus tard avec l'apport d'un élève de Johann Bernoulli : Leonhard Euler. Ce mathématicien d'origine Danoise, dans un ouvrage publié en 1748, a explicité la notion de constante et a défini la variable comme une quantité universelle ou indéterminée qui est en mesure de prendre toute valeur déterminée. Il a défini la fonction comme « *une expression analytique composée d'une manière quelconque avec la variable et des constantes*» ([D]). D'ailleurs, à ce moment, il ne considérait pas les fonctions constantes comme des fonctions. Plus tard, en 1755, il reformula sa définition de fonction. Dans cette nouvelle définition, Euler abordait maintenant la fonction d'un point de vue de dépendance entre deux variables plutôt que seulement du point de vue analytique. De plus, selon Youschkevitch, dans plusieurs de ses textes, Euler abordait déjà implicitement la fonction comme étant une correspondance entre des paires d'éléments. En revanche, dans la pratique, Euler ne considèrait que des fonctions analytiques. Pour lui, les façons d'agencer la variable et les constantes dans une expression analytique était d'abord par le biais d'opérations algébriques et ensuite, avec des exposants, des logarithmes, des expressions trigonométriques et plusieurs fonctions provenant du calcul différentiel et intégral. Il déclara cependant qu'il existe selon lui une formule universelle par laquelle peuvent se représenter toutes les expressions analytiques. Il faisait référence à un développement en série de puissances de la forme :

$$A + Bz + Cz^2 + ...(1)$$

Pour Euler, il ne faisait aucun doute que toute fonction pouvait être développée sous la forme (1). Il faut cependant comprendre que «*functions used in mathematical analysis in Euler's time were analytic (in our sense of the term) in the whole domain of their definition, except perhaps at isolated values of the argument ...* ». ([Y], p.63). De plus, Euler déclara, avec des terminologies différentes d'aujourd'hui, qu'une fonction est analytique exceptée en certains points isolés où il est quand même possible de la développer en série de puissances dans le voisinage de ces dits points. D'ailleurs, dans ses nombreux travaux, Euler fut un des pionniers dans le développement de fonctions en séries. En 1748, il transforma une fonction en série pour l'intégrer, dans le but de résoudre un problème de mouvement des planètes. Il élabora en 1777 des formules permettant de trouver les coefficients de séries développées dans l'intervalle $[0, \pi]$ qui furent retrouvées plus tard par Fourier dans l'élaboration de sa théorie des séries du même nom.

Par ses contributions en physique mathématique, Euler «a mis la table» pour une future évolution de la notion de fonction, particulièrement avec le fameux problème de la corde vibrante fixée en ses deux extrémités qui avait été énoncé par D'Alembert en 1746. Il avait compris que la solution à ce problème était dépendante des conditions initiales et en particulier, de la position initiale de la corde qui pouvait être représentée par une fonction pas nécessairement analytique. Lorsqu'à son époque, on faisait référence aux fonctions arbitraires, on faisait allusion à ce qu'on appelle aujourd'hui les fonctions continues (au sens moderne) qui ne sont pas nécessairement analytiques, puisqu'on se réfère à une position initiale quelconque de la corde vibrante. Certains comme Taylor et Daniel Bernoulli ont cherché à représenter les courbes arbitraires analytiquement en faisant appel à des séries trigonométriques. Cependant, Euler, tout comme Lagrange et D'Alembert, réfuta cette idée de représenter la position initiale de la corde par des séries trigonométriques. De plus, pour D'Alembert, il fallait restreindre la position initiale de la corde seulement aux fonctions analytiques car sinon, on sortait du domaine mathématique et aucune solution au problème n'était possible. Ainsi, ce dernier était en désaccord avec Euler sur la nature des fonctions qui devaient être admises pour les conditions initiales du problème de la corde vibrante.

Mentionnons maintenant qu'Euler fut le premier à définir explicitement ce qu'est à ses yeux une fonction continue. Il a défini en 1748 les fonctions continues comme étant « *celles dont la nature est définie par une relation précise entre les coordonnées exprimée par une équation ; en sorte que tous les points soient déterminés par une même équation, comme par une loi.* » ([Eu]). Ainsi, pour lui, une fonction était continue seulement si une seule et unique expression analytique permettait de déterminer l'ensemble de ses valeurs. Par exemple, il considérait que la fonction $f(x) = |x|$ était discontinue, car elle était pour lui seulement exprimable à l'aide de deux expressions analytiques distinctes (i.e. $f(x) = -x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x$ si $x \geq 0$). En somme, Euler voyait la continuité seulement de façon globale, i.e. une fonction était totalement continue ou totalement discontinue. Il considérait les fonctions continues comme les «véritables fonctions».

Avant la fin du 18e siècle, d'autres mathématiciens proposèrent leur définition pour la fonction. En 1778, dans un texte qui ne sera jamais publié, Concordet rédige une définition allant dans la même direction que les raisonnements théoriques et généraux d'Euler en associant la fonction indirectement à une notion de correspondance.

«*Enfin, si je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrois ni la manière d'exprimer F en x,y,z, ni la forme de l'équation entre F et x,y,z ; je saurai que F est une fonction de x,y,z..* » ([Y], p.75)
En 1797, Lacroix a également défini la fonction en suivant la même idée générale qu'Euler. Cependant, voyons dans sa définition que ce dernier insistait plus sur la notion de dépendance entre les variables que sur celle de correspondance entre deux ensembles :

«*Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.*» ([La] dans [Y] p. 76)

Enfin, dans son traité sur les fonctions analytiques paru en 1797, Lagrange a donné la définition suivante à la fonction :

« *On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles.*

Ainsi, dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées». ([Lag] dans [Mo], p.59)
De cette définition, surgit également la notion de dépendance entre les variables et on ne fait aucunement allusion aux expressions analytiques.

1.1.4. Fourier ébranle la notion de fonction

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, Euler n'était pas très chaud à l'idée de représenter des « fonctions arbitraires » et des fonctions que l'on appelle aujourd'hui « continues par morceaux » par des séries trigonométriques. Pourtant, au début du 19e siècle, Fourier avec son travail sur la théorie de la propagation de la chaleur donna une théorie générale sur le développement de fonctions en séries trigonométriques et il conclut ceci :

« *Il résulte de mes recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par des développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples. Conclusion que le célèbre Euler a toujours repoussée.*» ([Y], p.73)

La célèbre théorie des séries de Fourier voyait officiellement le jour bien que 30 ans auparavant, Euler avait déjà une idée des méthodes de calcul des coefficients comme nous le mentionnions plus tôt. Le concept de fonction d'Euler était maintenant ébranlé, puisque Fourier démontra que des fonctions qualifiées alors d'illégitimes par Euler étaient représentables en séries de fonctions périodiques. On ne pouvait maintenant plus dire que les propriétés relatives aux fonctions algébriques comme la continuité appartenaient à toutes les fonctions représentables par des expressions analytiques. D'ailleurs, selon Lebesgue «*c'est à l'occasion des séries trigonométriques que furent posés les plus importants des problèmes de la théorie générale des fonctions*». ([L-2], p. 23) Fourier a également défini en 1821 la notion de fonction dans son ouvrage «*Théorie analytique de la chaleur*». Il y mentionna entre autre que « *la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire* » ([Fo] dans [Y] p. 77). Ainsi, pour lui aussi, la fonction ne peut être synonyme de loi commune ou d'expression analytique.

1.1.5. Cauchy et Bolzano redéfinissent la notion de continuité

Dans un «*mémoire sur les fonctions continues* » [C-1], Augustin Cauchy a redéfini le concept de fonction continue avancé auparavant par Euler. Dans ce texte, il dénonça le manque de rigueur et de clarté dans la définition d'Euler. Il a d'ailleurs fait ressortir une contradiction dans sa définition en prenant l'exemple de la fonction que l'on appelle maintenant $f(x) = |x|$. Rappelons que pour Euler, cette fonction était discontinue puisque pour lui, elle s'exprimait à l'aide de deux équations. Par contre, Cauchy affirma que l'on peut également l'exprimer par la règle $f(x) = \sqrt{x^2}$. Cette fonction devenait alors continue. Cauchy remplaça la définition d'Euler qu'il jugeait « *vague et indéterminée*» [C-1] par la suivante :

« *la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.* » [C-1]

On voit que cette définition aborde maintenant la continuité d'un point de vue local (par rapport à x) et non d'un point de vue global comme Euler. Bien que sa définition soit exprimée strictement sous forme verbale, il est à noter que Cauchy utilisait des notations avec les lettres δ et ϵ lorsqu'il faisait des démonstrations impliquant la continuité dans ses travaux. Ainsi, il est un des premiers à avoir amené la définition rigoureuse de la continuité encore utilisée de nos jours. Cauchy donna également une définition pour la notion de fonction que voici :

«*Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.* »([C-2] dans [Y] p.76)

Ainsi, Cauchy associait encore, contrairement aux mathématiciens de la fin du 18e siècle mentionnés précédemment, la notion de fonction à une équation ou une expression analytique. Il utilisait dans ses démonstrations des raisonnements ne faisant appel qu'à des fonctions ayant un aspect analytique.

Bien que Cauchy donna une définition rigoureuse de la notion de continuité, il ne fut pas le premier à le faire. En effet, en 1817, soit quatre ans avant Cauchy, Bernard Bolzano , dans son mémoire intitulé «Rein analytischeir Beweis», donna pratiquement la même définition de la continuité que Cauchy. Cependant, les travaux de Bolzano furent ignorés pendant de nombreuses années et pour cette raison, on a cru pendant longtemps que Cauchy était le seul père de la notion de continuité moderne. Pourtant, même si la définition de continuité de Bolzano a le même sens que celle de Cauchy et qu'elle est aussi de nature globale, nous jugeons qu'elle est verbalement mieux formulée. Sa définition se lit comme suit : « Si x est d'une telle valeur, plus la différence $f(x+\omega)-f(x)$ peut être rendue aussi petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra. » ([Se], p.139). Dans cette définition, on voit beaucoup plus aisément l'idée de dépendance du « delta » en fonction du « epsilon ».

L'apport de Bolzano aux fondements de l'analyse ne se limite pas qu'à la définition de la continuité. Il a également introduit le théorème des valeurs intermédiaires et il a été le précurseur de nombreux autres résultats d'analyse. Il fut également le premier à donner un exemple d'une fonction continue nulle part dérivable. Nous reviendrons de façon plus approfondie sur le personnage à la section 1.2.

1.1.6. De Lobatchevsky à Weierstrass

En 1834, Lobatchevsky chercha lui aussi à donner un sens au concept de fonction. Il mentionna particulièrement que :

« *General conception demands that a function of x be called a number which is given for each x and which changes gradually together with x. The value of the*

function could be given either by an analytical expression, or by a condition which offers a means for testing all numbers and selecting on of them; or, lastly, the dependance may exist but remain unknown.» ([Y], p.77).
Ainsi, pour ce dernier, une fonction peut-être seulement définie par une condition générale et il est clair qu'il est question de correspondance entre un nombre x et un nombre fixé $f(x)$. Il mentionne d'ailleurs explicitement qu'il est impossible de représenter tout phénomène de la nature par des expressions analytiques tel que cela était admis par plusieurs à ce moment. De plus, il perçoit la notion de dépendance entre les variables d'un point de vue de connection entre deux nombres.

Dirichlet exprima sa conception de la notion de fonction trois ans après Lobatchevsky. Selon Youschkevitch, «*in essence the definitions of Lobatchevsky and Dirichlet are identical, the only difference being that Dirichlet thought it necessary to add a geometrical explanation.* » ([Y], p. 78). De plus, selon lui, Lobatchevsky et Dirichlet ne faisaient allusion implicitement qu'aux fonctions continues au sens de Cauchy et de Bolzano dans leur définition de fonction. Cela est particulièrement surprenant de la part de Dirichlet qui a pourtant créé un exemple maintenant devenu classique de fonction partout discontinue dans l'intervalle $[0, 1]$. Selon Hankel, l'importance de la définition de Dirichlet est l'esprit qui se cache derrière celle-ci et non sa formulation en tant que telle. Lebesgue semble appuyer ce fait comme en témoigne la citation suivante :

«*C'est Dirichlet et Riemann qui, comme l'on sait, insistèrent sur l'intérêt qu'il pouvait y avoir à considérer des correspondances définies par n'importe quel procédé; ils montrèrent par des exemples l'extraordinaire étendue de la notion de fonction.*» ([L-2], p. 9)

Dans un mémoire paru en 1870, Hankel propose une définition générale de la notion de fonction qu'il associe à Dirichlet. «*Une fonction s'appelle y de x, si à toute valeur de la variable x, prise dans un certain intervalle, correspond une valeur déterminée de y; la loi de dépendance pouvant dans cet intervalle varier arbitrairement et n'être exprimable par aucune opération mathématique.*» ([Ha]).

Selon Youschkevitch, Hankel a formulé sa définition prudemment et n'est pas tombé dans le piège de faire seulement allusion aux fonctions continues. Pour Hankel, les travaux de Dirichlet sur les séries de Fourier (il fait ici allusion aux conditions de convergence de telles séries établies par Dirichlet) ont démontré que le fait de voir la fonction comme une expression analytique était intenable. Par contre, Hankel ajoute que la notion de fonction au sens de Dirichlet n'est pas si différente de la première définition d'Euler (dans laquelle il voyait la fonction comme une expression analytique) étant donné que l'on peut représenter plusieurs fonctions « illégitimes » par des expressions analytiques. Pour Hankel, une fonction « légitime » était finie et continue pour toute valeur réelle, sauf en quelques points isolés. En d'autres mots, c'était les fonctions représentables en séries de Taylor. Même s'il admettait une portée plus générale pour la fonction, Hankel ne s'était pas départi des vieux réflexes des mathématiciens de l'époque en catégorisant les fonctions en fonctions «légitimes» ou non.

Mentionnons que Dirichlet et Riemann ont défini de façon vague le concept de continuité et qu'ils ne faisaient pas allusion à la définition précise amenée auparavant par Cauchy et Bolzano. Monna explique cette situation par la fait que : «*at their time mathematics did not need an exact definition of continuity. In the development of analysis, one met only functions which, as matter of fact, were continuous. Discontinuous functions were artificial and not genuine functions.*» ([Mo], p.64) Weierstrass formula quant à lui la définition de continuité de la même façon qu'on la retrouve aujourd'hui dans les livres d'analyse. De plus, 40 ans après Bolzano, il donna un deuxième exemple de fonction continue n'admettant pas de dérivées.

1.1.7. Controverses du début du 20e siècle

La fin du 19e siècle et le début du 20e siècle furent une époque de grandes controverses dans le domaine de l'analyse mathématique. D'abord, plusieurs ne voulaient pas reconnaître les fonctions continues n'admettant pas de dérivées et ils jugeaient qu'elles n'étaient rien de moins que des «monstres». De plus, il y eut de vigoureux débats sur la notion de fonction que plusieurs restreignaient encore, au début du 20e siècle, aux fonctions analytiques. Également, on ne s'entendait pas sur la façon de définir des objets mathématiques en général. Les principaux mathématiciens à s'être prononcés sur le concept de fonction durant cette période furent Baire, Borel et Lebesgue.

Voyons d'abord de quelle manière Baire introduit le concept de fonction :

«*Il y a fonction, dès qu'on image une correspondance entre des nombres, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable y, avec d'autres nombres, tous distincts, qu'on convient de considérer comme les états de grandeur d'une même variable x. On ne s'occupe pas, dans cette définition de rechercher par quels moyens la correspondance peut être effectivement établie.*» ([Ba-1] dans [Mo], p. 69)

On constate que cette définition est conforme au sens que voulait lui donner Dirichlet. D'ailleurs, Baire était considéré comme un des mathématiciens les plus avancés de son époque en terme d'acceptation des nouveaux concepts d'analyse. Il reconnaissait l'existence des fonctions continues sans dérivée et il avait déjà l'intuition que les fonctions continues admettant des dérivées étaient l'exception. De plus, Baire a réalisé une bonne partie de son travail de la théorie des fonctions sur la représentation de fonctions par des limites ponctuelles de suites de fonctions particulières. Il a créé inductivement tout un système de classes de fonctions, dont la première (la classe 0) était les fonctions continues et plus généralement, les fonctions de classe α étaient les fonctions pouvant s'exprimer comme la limite ponctuelle de fonctions de classe $\alpha - 1$. Les fonctions continues étant représentables comme la limite ponctuelle d'une suite de fonctions analytiques, il en découle que les expressions analytiques étaient à la base de la classification de Baire.

Henri Lebesgue affirma que toutes les fonctions construites par Baire dans sa classification sont représentables analytiquement et il s'est demandé comment démontrer l'existence de fonctions non représentables analytiquement. Il y est parvenu en utilisant quelques théorèmes de la théorie des ensembles de Cantor.

Lebesgue cherchait à démontrer cette existence possiblement pour faire taire ceux qui affirmaient encore que les fonctions analytiques sont les seules fonctions légitimes. Certains croyaient en effet que la théorie des fonctions avait apporté tout ce qu'elle pouvait apporter et qu'il ne servait à rien de perdre du temps avec des complications. Lebesgue était un peu amer des mathématiciens qui ne s'occupaient que des fonctions analytiques et continues. Pour lui, il n'y avait « *pas là de raisons suffisantes pour déclarer inutile les recherches sur les fonctions réelles*» ([L-2], p.47). Il accordait sensiblement le même sens au concept de fonction que Baire en insistant sur la notion de correspondance. Il déplorait le fait que plusieurs cours de mathématiques donnés aux alentours de 1905 ne faisait malheureusement pas ressortir cette idée de correspondance entre deux ensembles quelconques pour une fonction. Il a d'ailleurs reconnu que la théorie des ensembles était devenue auxiliaire à la théorie des fonctions.

Lebesgue ne s'entendait pas avec Borel sur les questions relatives à l'existence et à la définition d'une fonction. Pour Lebesgue, on peut définir une fonction si on peut la déterminer comme objet, i.e. lorsque deux personnes parlent de cet objet, elles parlent nécessairement du même. Selon lui, on peut déterminer une fonction sans nécessairement être en mesure de calculer toutes ses valeurs en chaque point et il s'est justifié de la façon suivante :

«*Quand il s'agit d'une fonction déterminée logiquement mais dont nous ne pouvons pas calculer la valeur, nous nous croyons en droit de raisonner sur elle parce que seule la propriété caractéristique qui détermine la fonction intervient dans notre raisonnement.*» ([L-2], p. 39)

Pour lui, la propriété caractéristique d'une fonction était une façon de la définir en quelques mots pour que ceux-ci ne s'appliquent qu'à cette fonction particulière.

Borel pensait lui aussi que pour déterminer correctement une fonction, il fallait être certain que lorsque deux mathématiciens parlent d'une fonction, ils parlent de la même. Par contre, pour déterminer correctement une fonction, il fallait, selon lui, être en mesure de déterminer sa valeur pour toutes les valeurs réelles de la variable. Il était également plus restreint que Baire et Lebesgue sur la notion de fonction, puisqu'il parlait d'établir une délimitation entre les fonctions « saines » et celles qui ne le seraient pas. D'ailleurs, il était plus limité que Lebesgue dans les fonctions qu'il « acceptait ». « *M. Lebesgue indique lui-même la différence qu'il y a entre nommer et définir une fonction ; mais je serais volontiers plus catégorique que lui ; partout où interviennent les nombres de seconde classe, ... on me paraît sortir du domaine des mathématiques.* » ([B-2] dans [Mo], p. 77)

Mentionnons également que dans [L-2], Lebesgue décrit deux courants philosophiques différents sur la notion de fonction : l'Idéalisme et l'Empirisme. Pour l'Empiriste, on ne peut pas raisonner sur une fonction sans savoir comment la déterminer et sans être assuré que tous parlent de la même fonction. Par exemple, pour l'Empiriste, on ne peut pas affirmer « soit une fonction continue » sans savoir de laquelle on parle. En revanche, pour l'Idéaliste, on peut se contenter de dire que l'on choisit une fonction et raisonner sur celle-ci sans qu'elle soit représentable. Ainsi, Borel était surtout à tendance empiriste, lui qui en particulier reprochait à Baire de raisonner sur ses classes de fonctions 0,1,2,3,... sans savoir s'il existe réellement des fonctions déterminables dans chacune de ces classes. À partir de 1918, Lebesgue cessa d'alimenter la controverse entourant la façon de définir une fonction. Borel est quant à lui revenu à la charge en 1922 en mentionnant cette fois-ci, que l'on peut parler des fonctions en se plaçant soit d'un point de vue abstrait comme Lebesgue ou d'un point de vue dans lequel on se restreint aux fonctions déterminables pour toute valeur de la variable indépendante. Pour lui, ceci revenait à faire « *la distinction entre les êtres réels et les êtres possibles* » ([B-3] dans [Mo], p.79) Il considérait que la démarquation était délicate entre les fonctions que l'on détermine « naturellement » et les fonctions monstrueuses trouvées artificiellement. Il affirma qu'il est bon de connaître les fonctions « anormales » pour décider au fil du temps celles qui devront être incluses ou exclues de la théorie des fonctions. Ainsi, Borel a fait preuve, encore une fois, d'une moins grande ouverture d'esprit que Baire ou Lebesgue.

1.1.8. Remarques finales

À la lumière de ce survol historique, on constate que bien qu'elle ait été pressentie dans l'Antiquité, la fonction s'est surtout développée à partir des travaux de Descartes en géométrie analytique. La fonction a longtemps été associée à une expression analytique ou représentable analytiquement et selon Youschkevitch, c'est Euler avec sa définition de 1755 qui donna implicitement le véritable coup d'envoi au courant de définition d'une fonction comme une règle de correspondance entre deux ensembles. Selon lui, ce sont les apports de Lobatchevsky et Dirichlet qui amenèrent les mathématiciens à définir la fonction avec la notion de correspondance. Par contre, pour Monna, «*the first indications of the idea of mapping go back to Bolzano* » ([Mo], p.81) et pour Lebesgue, Newton fut le premier a avoir cette idée de correspondance pour la fonction.

Cette idée de correspondance fut graduellement reprise en algèbre et les livres d'analyse commencèrent à définir la fonction comme une correspondance entre un ensemble X et un ensemble Y. Mentionnons en terminant que la physique a souvent contribué, au cours de l'histoire, à élargir le concept de fonction. Nous n'avons qu'à repenser au problème de la corde vibrante et au problème de la chaleur de Fourier vus plus tôt. Également, pensons à la naissance de la théorie des distributions dont une des motivations provient d'un problème physique de détermination de la densité de charge électrique dans une pièce où toute la charge est centrée dans un seul et même point.

1.2. Évolution de la notion de la propriété de la valeur intermédiaire

1.2.1. Bolzano

Bernard Bolzano naquit le 5 octobre 1781 à Prague. De 1791 à 1796, il étudia au « Gymnasium Piarist » pour ensuite entreprendre des études de philosophie à l'Université de Prague. Dans cette dernière institution, il suivit également des cours de physique et de mathématiques. C'est à ce moment qu'il développa un intérêt marqué pour ce dernier sujet et en particulier, pour la rigueur dont il faut faire preuve pour certaines conjectures souvent considérées comme évidentes. En 1800, il fut admis à la faculté de théologie où durant ses trois années d'étude dans ce domaine, il en profita pour préparer une thèse de doctorat en géométrie qu'il déposa en 1804. Cette thèse contenait également le point de vue de l'auteur sur ce que devait être une preuve rigoureuse et bien construite. Pour lui, une démonstration devait découler de concepts déjà admis et de résultats déjà démontrés antérieurement. Mentionnons également que deux jours après la sanction de son titre de docteur, il fut ordonné prêtre catholique. L'année suivante, il entrait en fonction à la chaire de philosophie et de religion de l'Université de Prague nouvellement créée par l'empereur d'Autriche qui régnait à ce moment sur la Tchécoslovaquie.

Bolzano était spirituellement en avance sur la société de l'époque en suivant les nouveaux modes de pensée. Ses discours religieux étaient grandement appréciés par les étudiants. Ses collègues de l'Université avaient beaucoup de considération pour lui et allèrent jusqu'à le nommer doyen de la faculté de philosophie en 1818. Pourtant, l'année suivante, à cause de ses idées progressistes et de ses dénonciations des injustices sociales, il fut renvoyé de l'Université suite à des pressions de l'Empire autrichien. On alla même jusqu'à lui interdire de publier des textes et à le placer sous surveillance policière. Pourtant, même censuré, Bolzano continua de publier à l'extérieur de l'Empire d'Autriche et cela lui permit de continuer à jouer un rôle de premier plan dans la vie intellectuelle de la Tchécoslovaquie.

Les activités sociales et religieuses de Bolzano à la faculté de philosophie ne l'empêchèrent pas de poursuivre ses travaux en mathématiques. En 1810, il publia «Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik». En 1816, son ouvrage intitulé «Der binomische Lehrsatz» paru et c'est l'année suivante qu'il termina la préparation du «Rein analytischer Beweis» dans lequel apparaît le fameux théorème des valeurs intermédiaires auquel nous reviendrons plus loin. Ce manuscrit contient également sa définition de continuité et celle de ce que l'on appelle aujourd'hui une suite de Cauchy. En 1835, il a écrit les «Functionenlehre» (leçons sur les fonctions) qui contiennent le tout premier exemple de fonction continue n'admettant pas de dérivées. Il apporta aussi des contributions à la notion d'infini avec des manuscrits sur les « Paradoxes de l'Infini » qui ont été publiés seulement après sa mort. Ce sont ses idées sur l'infini qui ont influencé la théorie des ensembles créée par Cantor. Dans les dernières années de sa vie, Bolzano poursuivit des études mathématiques et philosophiques à Prague. Il a rendu l'âme le 18 décembre 1848.

Bien que Bolzano ait apporté de précieuses contributions à l'analyse réelle par son souci de rigueur et de clarté, ses travaux restèrent longtemps inconnus. Ceux de Cauchy furent davantage publicisés et c'est par exemple ce qui explique que nous ayons aujourd'hui «les suites de Cauchy» et non «les suites de Bolzano». D'ailleurs, pour plusieurs personnes originaires de la République tchèque, Bolzano fut d'abord connu comme un grand philosophe et non comme un grand mathématicien du 19e siècle. Revenons toutefois à son texte intitulé «Rein analytischer Beweis» [Se], puisque c'est la propriété de la valeur intermédiaire qui nous intéresse. Il débute ce mémoire en mentionnant que les démonstrations de la propriété qu'une équation analytique négative en un point x_1 et positive en un point x_2 admet au moins un zéro entre x_1 et x_2 présentées antérieurement sont boiteuses. Selon lui, certaines preuves se basent sur un argument géométrique qui est une fabrication d'évidences et non une preuve. Dans l'introduction du texte, il relève les erreurs commises par ses prédécesseurs dans cinq types de preuves. Il propose dans son texte, de démontrer rigoureusement le théorème suivant, mieux connu aujourd'hui sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 1.2.1. *(Valeurs intermédiaires) « Si deux fonctions de x, $f(x)$ et $g(x)$ varient suivant la loi de continuité ou bien pour toutes les valeurs de x, ou bien au moins pour toutes celles qui sont situées entre a et b ; si de plus $f(a)<g(a)$ et $f(b)>g(b)$, alors il existe toujours une certaine valeur intermédiaire de x entre a et b pour laquelle $f(x)=g(x)$. » ([Se], p. 159)*

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, son texte contient une première définition rigoureuse de la continuité et il mentionne d'ailleurs qu'il faut rejeter l'expression de la notion de continuité en terme de mouvement. Selon lui, une preuve faisant intervenir la continuité qui serait bâtie à partir de l'idée du mouvement d'une particule serait erronée et ne serait qu'un cas particulier. Ainsi, Bolzano avait déjà une idée très générale de la portée de sa définition de continuité. Il a réfuté des résultats anciens dont celui d'Ampère qui avait réussi à démontrer que toute fonction continue est dérivable en utilisant justement l'idée du mouvement dans sa démonstration. Pour démontrer son théorème, Bolzano avait besoin d'un résultat préliminaire. Il s'agit d'un théorème qu'il a énoncé de la façon suivante :

Théorème 1.2.2. *« Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs d'une grandeur variable x, mais appartient à toutes celles qui sont plus petites qu'un certain u : alors il existe toujours une grandeur U qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures x possèdent la propriété M.» ([Se], p. 153)*

Aujourd'hui, ce théorème a été reformulé comme : « tout ensemble majoré de nombres réels admet un suprémum» et il est connu comme le théorème de Bolzano-Weierstrass. Cependant, la preuve de Bolzano manque un peu de rigueur étant donné qu'il utilise implicitement le fait que toute suite de Cauchy converge. Pourtant, à cette époque, il n'y avait pas encore de théorie des nombres réels établie et il n'était pas encore question de la complétude de $\mathbb{R}$. Entre 1832 et 1835, il tenta d'élaborer une théorie des nombres réels qui ne fut publiée qu'en 1962. Cette théorie fut développée par d'autres à partir de 1850 et ce, de façon tout à fait indépendante. Dans les ligne qui suivent, nous présentons la preuve originale de Bolzano traduite dans [Se] sur le théorème des valeurs intermédiaires. Si l'on prend pour acquis que le théorème préliminaire est bien démontré, sa preuve est tout à fait juste.

DÉMONSTRATION. Bolzano traite la démontration en quatre cas distincts :

- $0 < a < b$

- $0 > a > b$
- $a = 0$ et $b < 0$ ou $b > 0$
- a et b sont de signes opposés.

Nous traiterons seulement le premier cas, puisque l'on peut supposer sans perte de généralité que $a < b$ et de plus, les autres cas suivent le même raisonnement que la démonstration du premier cas. On peut ainsi affirmer qu'il existe un $i \in \mathbb{R}$ tel que $a + i = b$. Étant donné que f et g sont continues entre a et b, si ω désigne une grandeur positive pouvant être prise aussi petite que l'on voudra, on aura que :

$$f(a+\omega) < g(a+\omega).$$

En effet, en prenant $\omega < i$ suffisamment petit, on aura que $f(a+\omega) - f(a) = \Omega$ et que $g(a+\omega) - g(a) = \Omega'$ où Ω et Ω' peuvent être rendues aussi petites que l'on voudra en vertu de la continuité de f et g entre a et b. Par conséquent, $g(a+\omega) - f(a+\omega) = g(a) - f(a) + \Omega' - \Omega$ où $g(a) - f(a)$ est une grandeur positive fixe A. Ω et Ω' pouvant être rendus aussi petit que l'on voudra, il est possible de choisir un ω tel que $g(a+\omega) - f(a+\omega)$ sera positif.

On dira que ω possède la propriété M si $f(a+\omega) < g(a+\omega)$. Il va de soi que ce ne sont pas tous les ω compris entre 0 et i qui possèdent la propriété M étant donné que $f(a+i) = f(b) < g(b) = g(a+i)$. Ainsi, en vertu du théorème précédent, il existe une grandeur U qui est la plus grande de toutes les valeurs ω inférieures à U possédant la propriété M.

Ce U doit être situé entre 0 et i. En effet, il ne peut pas être égal à i, étant donné que l'on aurait que $f(a+\omega) < g(a+\omega)$, pour tout $0 \leq \omega < i$. Pourtant, par le même raisonnement que ci-haut, on pourrait démontrer qu'étant donné que $f(a+i) > g(a+i)$ et que f et g sont continues entre a et b, il en résulte que :

$$f(a+i-\omega) > g(a+i-\omega)$$

pour un ω suffisamment petit. Ainsi, il est absurde que tout ω compris entre 0 et i satisfasse à la propriété M et que $U = i$. De plus, on ne peut pas avoir que

$U > i$ étant donné que l'on aurait alors que $f(b) < g(b)$. Ainsi, on doit avoir que $a + U$ se situe entre a et b.

Remarquons qu'il est impossible que $f(a+U) < g(a+U)$, car en vertu de la continuité de f et g en $a+U$, on aurait que $f(a+U+\omega) < g(a+U+\omega)$ pour un ω suffisamment petit. Ainsi, U ne serait pas la plus grande de toutes les valeurs possédant la propriété M. De plus, il est impossible que $f(a+U) > g(a+U)$, car en vertu de la continuité de f et g en $a+U$, on aurait que $f(a+U-\omega) > g(a+U-\omega)$ pour un ω suffisamment petit. Ainsi, U ne serait pas la plus grande de toutes les valeurs possédant la propriété M, puisqu'il y aurait des valeurs inférieures à U qui ne possèderaient pas la propriété M. Il en résulte donc que l'on doit avoir $f(a+U) = g(a+U)$ et le théorème est démontré. $\square$

Plus tard, dans «Functionenlehre», Bolzano affirma qu'il existe des fonctions discontinues satisfaisant à la propriété de la valeur intermédiaire. Il ira même jusqu'à donner un exemple d'une fonction totalement discontinue qui satisfait cette propriété. Cet exemple était erroné, mais au moins, Bolzano avait eu l'intuition que la continuité n'était pas équivalente à la propriété de la valeur intermédiaire.

1.2.2. Darboux et Lebesgue

Après la tentative de Bolzano, Gaston Darboux, dans son Mémoire sur les fonctions discontinues [Da] publié en 1875, présenta un premier exemple convaincant d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant à la propriété de la valeur intermédiaire sans être continue en tout point. Avant d'introduire son exemple, il démontra le théorème suivant.

Théorème 1.2.3. *Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la dérivée d'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (i.e. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$), alors f satisfait à la propriété de la valeur intermédiaire.*

Ensuite, Darboux a construit un exemple de fonction discontinue $\forall x \in \mathbb{Q}$ qui était en fait la dérivée d'une autre fonction. Ainsi, il donnait aux mathématiciens de l'époque, un premier véritable contre-exemple à l'affirmation que toute fonction jouissant de la propriété de la valeur intermédiaire est également continue. Pour cette raison, on dit maintenant que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ passant d'un point $a \in \mathbb{R}$ à un point $b \in \mathbb{R}$ en prenant toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est continue à la Darboux. Voici l'exemple de fonction que cet auteur a introduit.

Exemple 1.2.1. *Considérons d'abord la fonction* $\phi(y) = y^2 \sin(1/y)$. *On peut aisément vérifier que cette fonction est continue et différentiable. On obtient que* $\phi'(y) = 2y \sin(1/y) - \cos(1/y)$ *si* $y \neq 0$ *et que* $\phi'(0) = 0$. *Ainsi,* $|\phi'(y)| \leq 3$ *si* $|y| \leq 1$.

Considérons maintenant les fonctions suivantes :

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n} \frac{d}{dx}\{\phi(\sin(n\pi x))\}$$

où les coefficients a_n *sont choisis de telle sorte que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument. Il en résulte que* $|f_n(x)| \leq 3\pi|a_n|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *et donc, que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformément vers une certaine fonction* $f(x)$. *Étant donné que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ *est la dérivée d'une fonction, alors* $f(x)$ *doit également être la dérivée d'une certaine fonction* $F(x)$. *En vertu du théorème précédent,* f *est continue à la Darboux .*

Darboux affirma sans démonstration que la fonction f est discontinue $\forall x \in \mathbb{Q}$. Pourtant, Halperin dans [Hn] apporta quelques précisions à cette affirmation en démontrant que pour un certain $x_0 \in \mathbb{Q}$ où $x_0 = p/q$ avec $(p,q) = 1$ et $q > 0$, f est discontinue en ce point si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que n est un multiple de q et tel que $a_n \neq 0$. Même après la publication de l'exemple de Darboux, on enseignait encore à tort dans certains établissements qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle satisfait à la propriété de la valeur intermédiaire. Henri Lebesgue souleva ce point dans son ouvrage intitulé « Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives » paru en 1904 [L-1] et il chercha à rectifier cette erreur une fois pour toutes en donnant un exemple de fonction $\phi : (0,1) \to [0,1]$ continue à la Darboux et totalement discontinue. Voici son exemple.

Exemple 1.2.2. *Soit $x \in (0,1)$ représenté sous forme décimale :*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

À partir de ce symbolisme, définissons $\phi : (0,1) \to [0,1]$ telle que :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si la suite } a_1, a_3, ..., a_{2n+1}, ... \text{ n'est pas périodique,} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2n-2+2i}}{10^i} & \text{si } a_1, a_3, ..., a_{2n+1}, ... \text{ est périodique et que la période} \\ & \text{débute à } a_{2n-1} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Cette fonction est continue à la Darboux puisqu'il est aisé de vérifier que pour tout intervalle $(a,b) \subset (0,1)$ où $a < b$, $\phi((a,b)) = [0,1)$. Ainsi, pour tout y situé entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$, $\exists x \in (a,b)$ tel que $\phi(x) = y$. Il va de soi que cette fonction est discontinue $\forall x \in (0,1)$ étant donné que $\forall \delta > 0$, $\phi((x-\delta, x+\delta)) = [0,1)$.

1.2.3. Halperin

Beaucoup plus tard, en 1950, Israël Halperin présenta un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à la Darboux et discontinue en tout $x \in \mathbb{R}$. En plus, cette fonction prend sur tout intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$ chacune des valeurs réelles une quantité non dénombrable de fois ! Voici l'exemple qui est également présenté dans [Hn].

Exemple 1.2.3. *Considérons une base de Hamel sur $\mathbb{R}$, i.e. une suite transfinie non dénombrable de nombres réels : $a_1, a_2, a_3, ..., a_\alpha, ...(\alpha < \Omega)$ telle que :*

- *i) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha a_\alpha$, où $r_\alpha \in \mathbb{Q}, \forall \alpha$ et $r_\alpha \neq 0$ seulement pour un nombre fini de α.*
- *ii) le développement est unique.*

Il est possible de séparer cette base en deux suites transfinies non dénombrables $\{b_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ et $\{c_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$.

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha a_\alpha$$

si $x = \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha b_\alpha + \sum_{\beta<\Omega} s_\beta c_\beta$.

Soient maintenant $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *et* $u \in \mathbb{R}$. *Montrons que dans* (a, b), *il existe une suite transfinie non dénombrable* $\{y_\beta\}_{\beta<\Omega}$ *telle que* $f(y_\beta) = u, \forall\beta$. *On sait qu'il existe des nombres* $r_1, r_2, ..., r_\alpha, ... \in \mathbb{Q}$ *tels que* $u = \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha a_\alpha$. *De plus,* $\forall\beta < \Omega$, $\exists s_\beta \in \mathbb{Q}$ *tel que* $a - \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha b_\alpha < s_\beta c_\beta < b - \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha b_\alpha$. *Il en résulte que* $y_\beta = \sum_{\alpha<\Omega} r_\alpha b_\alpha + s_\beta c_\beta \in (a, b)$ *et que* $f(y_\beta) = u$, $\forall\beta$. *Ainsi, pour tout intervalle* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, f *prend toute valeur réelle un nombre de fois équivalent à la cardinalité du continu. Ainsi,* f *est totalement discontinue étant donné que* $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall\delta > 0$, $f((x - \delta, x + \delta)) = \mathbb{R}$.

Au fil des exemples présentés, nous pouvons constater que plusieurs types de fonctions font partie de l'ensemble des fonctions continues à la Darboux allant de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Nous remarquerons justement au chapitre 4 que cet ensemble est très riche.

Chapitre 2

LES PRINCIPALES CONTRIBUTIONS D'HENRY BLUMBERG : GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS

2.1. Un théorème de restriction relatif à la continuité

En 1922, Henry Blumberg [Bl-1] démontra un théorème de restriction maintenant devenu célèbre. Il prouva que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il existe un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ dense en $\mathbb{R}^2$ tel que $f|D$ est continue. Plusieurs autres mathématiciens généralisèrent ce théorème pour des fonctions ayant certains types d'espaces métriques comme domaine, dans les années 1950-1960. Par contre, en 1975, Bennett [Be] proposa une nouvelle extension pour $f : X \to \mathbb{R}$ où X est un espace de Baire, régulier et semi-métrisable. L'année suivante, Alas [A] reprit le résultat de Bennett où pour le co-domaine, elle remplaça $\mathbb{R}$ par un espace métrique séparable. Dans la section qui suit, nous proposons une nouvelle extension de ce résultat pour une fonction $f : X \to Y$ où X est toujours un espace de Baire, régulier et semi-métrisable et où Y est topologique satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Pour arriver au résultat principal, nous avons adapté les définitions et simplifié certains résultats préliminaires de Blumberg et Bennett. Débutons par quelques rappels et définitions de topologie auxquels nous ferons référence dans certaines démonstrations de ce chapitre et des suivants.

Rappel 2.1.1. Un espace topologique X satisfait au premier axiome de dénombrabilité si tout point $x \in X$ possède une base dénombrable de voisinages. Dans ce type d'espace, un point $x \in X$ appartient à l'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble $A \Leftrightarrow$ il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x.

Rappel 2.1.2. Un espace topologique X satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité s'il possède une base dénombrable de voisinages pour sa topologie. Dans ce type d'espace, il est toujours possible de trouver un sous-ensemble $A \subset X$ dénombrable et dense dans X.

Rappel 2.1.3. Le produit dénombrable d'espaces topologiques satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité (resp. au premier axiome) est également un espace satisafaisant au deuxième axiome de dénombrabilité (resp. au premier axiome).

Définition 2.1.1. *Un espace topologique X est un espace de Baire si pour toute collection dénombrable d'ensembles fermés $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X à intérieur vide, l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a un intérieur vide. On peut aussi dire que X est un espace de Baire si et seulement si tout ouvert non vide de X est de deuxième catégorie.*

Rappel 2.1.4. X est un espace de Baire $\Leftrightarrow$ Pour toute collection dénombrable d'ensembles ouverts $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denses en X, l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ est également dense dans X.

Définition 2.1.2. *Un ensemble $A \subset E$ est ouvert relativement à $E \Leftrightarrow A = E \bigcap O$ pour un certain ouvert O.*

Voici maintenant un théorème dont nous nous servirons plus loin. Nous en omettons la démonstration qui se trouve dans [K].

Théorème 2.1.1. *Soit Y un espace topologique. Soit $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ une famille de puissance quelconque d'ensembles ouverts de Y relativement à $S = \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha$. Si X_α est de première catégorie $\forall \alpha \in J$, alors S est aussi de première catégorie.*

Pour les définitions suivantes, nous considérons une fonction $f : X \to Y$ où X et Y sont des espaces topologiques.

Définition 2.1.3. *Une fonction f approche un point $x \in X$ en première catégorie (noté $f_1 \to x$) si $\exists V \in \mathcal{V}(f(x))$ et $\exists U(x,V) \in \mathcal{V}(x)$ tel que l'ensemble $T(x,V) = \{z \in U(x,V) | f(z) \in V\}$ est de première catégorie.*

Définition 2.1.4. *Une fonction f approche un point $x \in X$ en deuxième catégorie (noté $f_2 \to x$) si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$ et $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble $T(x,U,V) = \{z \in U(x,V) | f(z) \in V\}$ est de deuxième catégorie. Pour $R \subset X$, on dira que f approche $x \in R$ en deuxième catégorie via R si l'ensemble $T(x,V) \bigcap R$ est de deuxième catégorie.*

Définition 2.1.5. *Une fonction f approche un point $x \in X$ de façon dense (noté $f_D \to x$) si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$, $\exists U(x,V) \in \mathcal{V}(x)$ tel que l'ensemble $T(x,V) = \{z \in U(x,V) | f(z) \in V\}$ est dense dans $U(x,V)$. Pour $R \subset X$, on dira que f approche $x \in R$ de façon dense via R si l'ensemble $T(x,V) \bigcap R$ est dense dans $U(x,V) \bigcap R$.*

À partir des définitions que nous venons d'énoncer, démontrons deux lemmes préalables à la généralisation du théorème de Blumberg.

Lemme 2.1.1. *Pour toute fonction $f : X \to Y$ où X est un espace de Baire et Y satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité, il existe un ensemble R, de deuxième catégorie, tel que f approche x en deuxième catégorie via R, $\forall x \in R$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'ensemble $E = \{x \in X | f_1 \to x\}$ est de première catégorie. Si $x \in E$, alors $\exists V_x \in \mathcal{V}(f(x))$ et il existe un ouvert $U(x, V_x) \in \mathcal{V}(x)$ tel que l'ensemble $T(x, V_x) = \{z \in U(x, V_x) | f(z) \in V_x\}$ est de première catégorie. Soit $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, une base dénombrable pour la topologie de Y. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \in B_k \subset V_x$. Posons $C_k = \{x \in E | B_k \subset V_x\}$, i.e. l'ensemble des points de E où $T(x, B_k)$ est de première catégorie. Ainsi, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ et il suffira de montrer que C_k est de première catégorie et a fortiori que $S = \bigcup_{x \in C_k} T(x, B_k)$ est de première catégorie (étant donné que si $x \in C_k$, alors $x \in T(x, B_k)$).

Soient $x, y \in C_k$, alors $T(x, B_k) \bigcap U(y, B_k) \subset T(y, B_k)$. En effet, si $z \in T(x, B_k)$, alors $f(z) \in B_k$ et si de plus, $z \in U(y, B_k)$, alors par définition, $z \in T(y, B_k)$. On peut donc affirmer que $T(x, B_k) \bigcap U(y, B_k) \subset T(y, B_k)$, $\forall x \in C_k$ et pour un certain $y \in C_k$ fixé. Il en résulte que

$$S \bigcap U(y, B_k) = \bigcup_{x \in C_k} (T(x, B_k) \bigcap U(y, B_k)) = T(y, B_k)$$

. Ainsi, $T(y, B_k)$ est relativement ouvert à S et en vertu du théorème 2.1.1, S est de première catégorie. Donc, E est de première catégorie.

Posons $R := X - E$. Puisque X est un espace de Baire, alors R est un ensemble de deuxième catégorie. En vertu de ce qui précède, f approche x en deuxième catégorie si $x \in R$ et selon la notation de la définition, l'ensemble $T(x, U, V)$ est de deuxième catégorie. Ainsi, $T(x, U, V) \bigcap R$ est de deuxième catégorie $\forall U \in \mathcal{V}(x)$ et $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$. Il en résulte que si $x \in R$, alors f approche x en deuxième catégorie via R. □

Lemme 2.1.2. *Soit $f : X \to Y$ arbitraire, où X est un espace de Baire et où Y satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité et soit $R \subset X$. Si f approche $x \in R$ en deuxième catégorie via R, alors f approche x de façon dense via R*

DÉMONSTRATION. Allons-y par contraposée. Si f n'approche pas $x \in R$ de façon dense via R, alors $\exists V \in \mathcal{V}(f(x))$ tel que $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble $T(x, U, V) \bigcap R$ est non-dense dans $U \bigcap R$ et à fortiori, non-dense dans X. Ainsi, $T(x, U, V) \bigcap R$ est de première catégorie et donc, f n'approche pas x en deuxième catégorie via R. □

Avant d'aborder la preuve de notre théorème principal, voici une dernière définition et un dernier résultat préliminaire qui est dû à Heath [H].

Définition 2.1.6. *Soit X un espace topologique. On dira que X est un espace semi-métrisable s'il existe une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que :*

- *i)* $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$
- *ii)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *iii)* $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \inf\{d(x, y) | y \in M\} = d(x, M) = 0$.

Théorème 2.1.2. *(Heath) Soit X, un espace topologique T_1. X est semi-métrisable $\Leftrightarrow$ il existe une famille d'ensembles ouverts de X, $G = \{G_{n,x}\}_{n \in \mathbb{N}, x \in X}$ telle que :*

- *i) $\forall x \in X$, $\{G_{m,x}\}_{m \in \mathbb{N}}$ est une base locale au point x telle que si $m \leq n$, alors $G_{n,x} \subset G_{m,x}$*
- *ii) Si $y \in X$ et si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{n,x_n}$, alors la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y.*

DÉMONSTRATION. Si X est un espace muni d'une semi-métrique d, alors on peut définir $G_{n,x} := int\{y \in X | d(x,y) < 1/n\}$. Cette définition nous donne clairement une famille d'ensembles ouverts satisfaisant à la condition i) et servant de base dénombrable pour les voisinages du point x. Il reste à montrer que si $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_{n,x_n}$, alors la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Prenons $V \in \mathcal{V}(y)$ pour un certain $y \in X$. On aura qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in G_{N,y} \subset V$. Puisque $\forall n \geq N$, $y \in G_{n,x_n}$ et donc que $d(y,x_n) = d(x_n,y) < 1/n \leq 1/N$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in V$. Ainsi, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$.

Si X possède une famille d'ensembles ouverts $G = \{G_{n,x}\}_{n\in\mathbb{N},x\in X}$ satisfaisant à i) et ii), nous définirons l'application $m : X \times X \to \mathbb{N}$; $m(x,y) = \min\{p \in \mathbb{N} | y \notin G_{p,x}\}$. Cette application est bien définie étant donné que X est un espace T_1. Définissons maintenant l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que :

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \min\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\} & \text{si } x \neq y \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On voit aisément que par définition, d satisfait aux conditions i) et ii) de la définition 2.1.4. De plus, $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in M$ tel que $y_n \in G_{n,x} \Leftrightarrow$ par définition, $d(x,y_n) \leq 1/n \Leftrightarrow \inf\{d(x,y) | y \in M\} = d(x,M) = 0$. Ainsi d est une semi-métrique et X est semi-métrisable.

$\square$

Voici finalement le théorème principal.

Théorème 2.1.3. *Pour toute fonction $f : X \to Y$ où X est un espace de Baire, régulier et semi-métrisable et où Y est un espace topologique satisfaisant le deuxième axiome de dénombrabilité, il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dense dans X tel que $f|D$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Faisons au préalable trois remarques :

1)Étant donné que X est un espace de Baire, en vertu des lemmes 2.1.1 et 2.1.2, $\exists R \subset X$ dense en X tel que $\forall x \in R$, f approche x d'une façon dense via R.

2)Étant donné que X est régulier et semi-métrisable, alors par le théorème précédent, il existe une famille d'ensembles ouverts de X, $G = \{G_{nx}\}_{n\in\mathbb{N},x\in X}$ satisfaisant aux conditions i) et ii) de ce théorème.

3) Étant donné que Y satisfait au premier axiome de dénombrabilité, $\forall y \in Y$, il existe une base dénombrable de voisinages ouverts $\{V_{y,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que si $m \leq n$, alors $V_{y,n} \subset V_{y,m}$.

Soit $x_{1,1}$ un premier élément choisi dans R. En vertu de la remarque 1) et de la condition i) de la remarque 2), il est possible de choisir $n_{1,1}$ le plus petit entier positif tel que l'ensemble $H_{1,1} = \{z \in G_{n_{1,1},x_{1,1}} \bigcap R | f(z) \in V_{f(x_{1,1}),1}\}$ soit dense dans $G_{n_{1,1},x_{1,1}}$. Le choix de $x_{1,1}$ et de $G_{n_{1,1},x_{1,1}}$ constituent les premières étapes des constructions respectives de $B_1 = \{x_{1,\alpha} | \alpha \in A_1\}$, un sous-ensemble d'éléments de R et de $G_1 = \{G_{n_{1,\alpha},x_{1,\alpha}}\}_{\alpha\in A_1}$ une famille d'ouverts disjoints de G. On veut que ces constructions satisfassent aux conditions suivantes :

- i) $\bigcup\limits_{\alpha\in A_1} G_{n_{1,\alpha},x_{1,\alpha}}$ doit être dense dans X (ceci est possible étant donné que R est dense dense dans X)
- ii) $\forall\alpha \in A_1$, $G_{n_{1,\alpha},x_{1,\alpha}}$ doit contenir un sous-ensemble

$$H_{1,\alpha} = \{z \in G_{n_{1,\alpha},x_{1,\alpha}} \bigcap R | f(z) \in V_{f(x_{1,1}),1}\}$$

  dense en $G_{n_{1,\alpha},x_{1,\alpha}}$ (ceci est possible en vertu de la remarque 1).

Réalisons ces constructions par induction. On suppose que les $x_{1,\beta}$ ont été choisis $\forall\beta < \delta$ et que ces choix ont été réalisés de sorte que $\forall\alpha, \beta < \delta$ où $\alpha \neq \delta$, $G_{n_{1,\alpha},x_{1,\alpha}} \bigcap G_{n_{1,\beta},x_{1,\beta}} = \emptyset$. On choisit un élément de R n'appartenant pas à $G_\delta = \overline{\bigcup_{\beta<\delta} G_{n_{1,\beta},x_{1,\beta}}}$ que l'on nomme $x_{1,\delta}$. On pose ensuite $n_{1,\delta}$ comme étant le plus petit entier positif tel que :

- i) $G_{n_{1,\delta},x_{1,\delta}} \bigcap G_\delta = \emptyset$ (ceci est possible étant donné que X est régulier)
- ii) $H_{1,\delta} = \{z \in G_{n_{1,\delta},x_{1,\delta}} \bigcap R | f(z) \in V_{f(x_{1,\delta}),1}\}$ soit dense dans $G_{n_{1,\delta},x_{1,\delta}}$ (ceci est possible étant donné la remarque 1))

À force de répéter l'induction, les constructions de B_1 et G_1 satisferont aux conditions désirées et A_1 représentera l'ensemble des α qu'il fût nécessaire de retenir dans le processus d'induction. Ces indices α seront considérés bien ordonné pour un certain ordinal ω.

Afin de poursuivre la preuve, démontrons deux autres remarques importantes.

4) Si $H_1 = \bigcup_{\alpha \in A_1} H_{1,\alpha}$, alors H_1 est dense dans X. En effet,

$$X = \overline{\bigcup_{\alpha \in A_1} G_{n_{1,\alpha}, x_{1,\alpha}}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in A_1} \overline{H_{1,\alpha}}} \subset \overline{\overline{\bigcup_{\alpha \in A_1} H_{1,\alpha}}} = \overline{H_1}.$$

.

5) Si $x \in H_1$, alors f approche x d'une façon dense via H_1. En effet, si $x \in H_1$, alors $x \in H_{1,\beta}$ pour un certain $\beta \in A_1$. Ainsi, $f(x) \in V_{f(x_{1,\beta}),1}$ et $V_{f(x),1} \bigcap V_{f(x_{1,\beta}),1}$ est un ouvert contenant $f(x)$. En vertu de la remarque 3), $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq m$, alors $V_{f(x),n} \subset V_{f(x),1} \bigcap V_{f(x_{1,\beta}),1}$. Puisque f approche x de façon dense via R, alors $\exists U(x, V_{f(x),n}) \in \mathcal{V}(x)$ où $U(x, V_{f(x),n}) \subset G_{n_{1,\beta}, x_{1,\beta}}$ et tel que $T_{x,n} = \{z \in U(x, V_{f(x),n}) \bigcap R | f(z) \in V_{f(x),n}\}$ est dense dans $U(x, V_{f(x),n})$ et ce, $\forall n \geq m$. Si $z \in T_{x,n}$, alors $f(z) \in V_{f(x),n}$ et $z \in G_{n_{1,\beta}, x_{1,\beta}} \bigcap R$. Ainsi, $z \in H_{1,\beta}$ et donc, $T_{x,n} = \{z \in U(x, V_{f(x),n}) \bigcap H_1 | f(z) \in V_{f(z),n}\}$ est dense dans $U(x, V_{f(x),n})$, $\forall n \geq m$. On déduit facilement que si f approche x d'une façon dense via H_1.

Construisons maintenant des ensembles B_i, G_i et H_i par induction en utilisant comme point de départ les ensembles B_1, G_1 et H_1. On va supposer que les ensembles B_i, G_i et H_i ont été choisis pour $1 \leq i \leq k$ et que ces familles d'ensembles générées satisfont aux conditions suivantes :

- i*) $B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_k$
- ii*) Si $G \in G_i$, alors G est un élément de la base locale d'un élément de B_i selon la remarque 2).
- iii*) $\bigcup_{\alpha \in A_i} G_{n_{i,\alpha}, x_{i,\alpha}}$ est dense dans X
- iv*) $\forall G \in G_{i+1}$, $\exists G' \in G_i$ tel que $\overline{G} \subset G'$, pour $1 \leq i \leq k-1$.
- v*) Les éléments de G_i sont disjoints deux à deux.
- vi*) $R \supset H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_k$ et H_i est dense dans X pour $1 \leq i \leq k$.
- vii*) $H_i = \bigcup_{\alpha \in A_i} H_{i,\alpha}$ et $H_{i,\alpha}$ est un sous-ensemble dense de $G_{n_{i,\alpha}, x_{i,\alpha}}$ tel que $\forall z \in H_{i,\alpha}$, on a $f(z) \in V_{f(x_{i,\alpha}),i}$
- viii*) Si $x \in H_i$, alors f approche x d'une façon dense via H_i.

Par construction, B_1, G_1 et H_1 vérifient évidemment les conditions i*) à viii*) et il reste à procéder aux étapes nécessaires afin d'obtenir B_{k+1}, G_{k+1} et H_{k+1}. Tout d'abord, on va inclure tout élément $x_{k,\alpha} \in B_k$ dans B_{k+1} de façon à satisfaire la condition i*). Ensuite, pour chaque $x_{k,\alpha}$, on choisi le plus petit entier positif $n_{k+1,\alpha}$ tel que $\overline{G_{n_{k+1,\alpha},x_{k,\alpha}}} \subset G_{n_{k,\alpha},x_{k,\alpha}}$ de façon à satisfaire à la condition iv*) (ceci est possible étant donné que X est régulier) et tel que $H'_{k+1,\alpha} = \{z \in G_{n_{k+1,\alpha},x_{k,\alpha}} \bigcap H_k | f(z) \in V_{f(x_{k,\alpha}),k+1}\}$ est dense dans $G_{n_{k+1,\alpha},x_{k,\alpha}}$ de façon à satisfaire la condition vii*) (ceci est possible étant donné que f approche x d'une façon dense via H_k, si $x \in H_k$). Considérons maintenant $U_\alpha = G_{n_{k,\alpha},x_{k,\alpha}} - \overline{G_{n_{k+1,\alpha},x_{k,\alpha}}}$. Puisque H_k est dense dans X, il est également dense dans U_α et on peut utiliser la même méthode que plus haut en choisissant un ensemble d'indices $A_{k+1,\alpha}$ et un sous-ensemble $B'_{k+1,\alpha} = \{x_{k+1,\beta}\}_{\beta \in A_{k+1,\alpha}}$ dans $U_\alpha \bigcap H_k$. Il s'en suit que l'on peut choisir une famille d'ouverts $G'_{k+1,\alpha} = \{G_{n_{k+1,\beta},x_{k+1,\beta}}\}_{\beta \in A_{k+1,\alpha}}$ disjoints deux à deux et telle que :

- i) Si $G \in G'_{k+1,\alpha}$, alors $G \subset U_k$.
- ii) $\overline{\bigcup_{\beta \in A_{k+1,\alpha}} G_{n_{k+1,\beta},x_{k+1,\beta}}} = \overline{U_\alpha}$
- iii) $\forall \beta \in A_{k+1,\alpha}$, $G_{n_{k+1,\beta},x_{k+1,\beta}}$ contient un sous-ensemble dense $H_{k+1,\beta} \subset H_k$ tel que $\forall z \in H_{k+1,\beta}$, on a $f(z) \in V_{f(x_{k+1,\beta}),k+1}$

Posons :

- $B_{k+1,\alpha} = B'_{k+1,\alpha} \bigcup \{x_{k,\alpha}\}$
- $G_{k+1,\alpha} = G'_{k+1,\alpha} \bigcup \{G_{n_{k+1,\alpha},x_{k,\alpha}}\}$
- $H_{k+1,\alpha} = \bigcup_{\beta \in A_{k+1,\alpha}} H_{k+1,\beta} \bigcup \{H'_{k+1,\alpha}\}$

On définit alors $B_{k+1} = \bigcup_{\alpha \in A_k} B_{k+1,\alpha}$, $G_{k+1} = \bigcup_{\alpha \in A_k} G_{k+1,\alpha}$ et $H_{k+1} = \bigcup_{\alpha \in A_k} H_{k+1,\alpha}$. On vérifie aisément que ces ensembles satisfont aux conditions i*) à v*) de l'hypothèse d'induction et en utilisant le même raisonnement que dans les justifications 4) et 5), on verrait que H_{k+1} satisfait à vi*) et viii*). De plus, on peut réarranger les éléments de B_{k+1} de façon à ce qu'ils soient tous de la forme $x_{k+1,\alpha}$ où α fait maintenant partie de la suite d'indice d'un ensemble A_{k+1}. Ainsi, les éléments de G_{k+1} et de H_{k+1} sont réarrangés en conséquence pour pouvoir satisfaire à vii*). On peut donc poursuivre le processus d'induction à volonté pour construire les ensembles B_i, G_i et H_i $\forall i \in \mathbb{N}$

.

Posons $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Montrons que D est dense dans X. $\forall i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $K_i = \bigcup_{G \in G_i} G$ est dense dans X en vertu de la condition iii*). Puisque X est un espace de Baire, en vertu du rappel 2.1.4, l'ensemble $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ est aussi dense dans X. De plus, D est dense dans K. En effet, si $z \in K$, alors $z \in K_i = \bigcup_{G \in G_i} G$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists x_{i,\alpha_i}$ tel que $z \in G_{n_{i,\alpha_i}, x_{i,\alpha_i}}$. En vertu du théorème 2.1.2, la suite $\{x_{i,\alpha_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers z. Ainsi, $z \in \overline{D}$ et D est dense dans K. Il en résulte que $X = \overline{K} = \overline{\overline{D}} = \overline{D}$, ce qui démontre que D est dense dans X.

Montrons finalement que $f|D$ est continue, $\forall x \in D$. Soit $x \in D$ et soit $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Par définition de D et par la condition i*), $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geq i$, $x \in B_j$. De plus, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $V_{f(x),k} \subset V$. Posons $m := max\{i, k\}$. Dans ce cas, $x \in B_m$ et par construction des ensembles B_i et G_i, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $G_{n,x} \in G_m$ est un élément de la base ouverte des voisinages de x. Si $z \in G_{n,x} \bigcap D$, alors par construction des ensembles B_i et H_i, on a que $z \in G_{n,x} \bigcap H_m$ et a fortiori que $z \in H_{n,x}$. Par définition de $H_{n,x}$, $f(z) \in V_{f(x),m}$. Ainsi, $f|D$ est continue en x. $\square$

La façon de construire l'ensemble D cherché est calquée sur le raisonnement utilisé par Blumberg dans sa propre démonstration. Étant donné qu'il travaillait avec les réels et donc, avec un espace séparable, les indices α de ses ensembles B_i étaient en fait des entiers positifs. Ainsi, l'ensemble D construit par Blumberg était dénombrable. Nous serions porté à nous demander s'il n'y aurait pas lieu de modifier la construction de l'ensemble D et de démontrer l'existence d'un ensemble D' qui serait non-dénombrable de façon à rendre le théorème encore plus fort. En 1923, Sierpinski et Zygmund [S-Z] démontrèrent l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\forall D' \subset \mathbb{R}$ non-dénombrable, $f|D'$ n'est pas continue. Ainsi, on savait déjà, un an après sa parution, qu'il était impossible d'«améliorer» la conclusion de ce théorème.

2.2. Un théorème sur la quasi-continuité

Toujours dans son article [Bl-1] paru en 1922, Blumberg défini la notion de quasi-continuité pour les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit (la définition de densité métrique extérieure à laquelle nous faisons référence est la même que la définition 2.2.6 présentée plus loin) :

Définition 2.2.1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-continue en x_0 si $\forall \epsilon > 0$, l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} | |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ a sa densité métrique extérieure égale à un au point x_0.*

Il démontra que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-continue presque partout. Sierpinski [S-1] arriva au même résultat de façon tout à fait indépendante l'année suivante. Cependant, il donna un tout autre nom au concept de quasi-continuité défini par Blumberg et il parla plutôt de propriété P pour une fonction en un point donné. Dans la section qui suit, nous généraliserons cet autre résultat de Blumberg pour des fonctions $f : X \longrightarrow Y$ où X est un espace métrique séparable et Y est topologique satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Avant d'arriver aux résultats préliminaires et au théorème principal, nous devons construire une mesure extérieure $\mu*$ et une mesure μ appropriées sur X.

2.2.1. Construction d'une mesure extérieure sur un espace métrique séparable

Pour la construction explicite de la mesure, nous allons suivre les méthodes I et II proposées dans le livre de Munroe [Mn].

Considérons une famille de boules ouvertes $\{B_r(x)\}_{x \in X, r \geq 0}$ de X que l'on appelera $\mathcal{C}$. Par convention, nous accepterons que l'ensemble vide fasse partie de $\mathcal{C}$. Définissons l'application $\tau : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ telle que :

$$\tau(B) = \begin{cases} diam(B) & \text{si } B \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } B = \emptyset. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Considérons maintenant les familles de boules ouvertes $\mathcal{C}_n$ de X tel que $\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{C} | diam(B) \leq 1/n\}$. Encore une fois, nous accepterons que l'ensemble vide appartienne à $\mathcal{C}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Remarquons que par définition des $\mathcal{C}_n$ et puisque X

est séparable, on aura que $\forall A \subset X$, il existe une suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_n$ tel que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. On peut alors définir une fonction $\mu_n^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ telle que :

$$\mu_n^*(A) = \inf\{\Sigma_{i=1}^{\infty}\tau(E_i) | E_i \in \mathcal{C}_n; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}$$

Remarquons que $\mu_n^*(A) \leq \mu_{n+1}^*(A), \forall n \in \mathbb{N}$ et posons $\mu^*(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n^*(A)$. En vertu du théorème 13.3 de [Mn], μ^* est une mesure métrique extérieure, i.e. une fonction $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ satisfaisant aux quatres propriétés suivantes :

- I- Si $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- II- Pour toute suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de X, $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$
- III- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- IV- Si $d(A,B) > 0$, alors $\mu^*(A \bigcup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Considérons maintenant les ensembles de Borel engendrés par les ouverts et les fermés de X. En vertu du théorème 13.2 et du corollaire 13.2.1 de [Mn], ces ensembles sont tous mesurables avec la mesure μ^*. Ainsi, on appelera $\mathcal{B}(X)$, la tribu borélienne engendrée par les ouvert de X et on aura ainsi une mesure μ sur X telle que $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(X)}$. En plus de satisfaire aux conditions I à IV, μ étant une mesure conventionnelle, elle satisfait également à la propriété que pour toute suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles mesurables disjoints deux à deux de X,

- V- $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$

Définition 2.2.2. *Une mesure extérieure μ^* est régulière si $\forall A \subset X$, il existe un ensemble mesurable E tel que $A \subset E$ et $\mu^*(A) = \mu(E)$.*

Théorème 2.2.1. *La mesure extérieure μ^* définie ci-haut est régulière.*

DÉMONSTRATION. Voir la preuve du théorème 13.4 de [Mn]. □

Voici maintenant une dernière caractéristique de la mesure μ qui nous sera nécessaire dans la prochaine sous-section pour généraliser le théorème.

Définition 2.2.3. *Une mesure positive μ est σ-finie s'il existe une suite $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X qui sont de mesure finie et qui épuisent X, i.e.*

- *i)* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(D_n) < \infty$

- *ii)* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

Proposition 2.2.1. *La mesure $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(X)}$ construite ci-haut est σ-finie.*

DÉMONSTRATION. Étant donné que X est séparable, il possède une partie dense et dénombrable $D = \{d_1, d_2, ..., d_n, ...\}$. Soit $D_i = B_1(d_i)$. Puisque D est dense dans X, alors $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. De plus, les D_i sont des ensembles ouverts et donc mesurables. En vertu des définitions de μ et $\mu*$, $\mu(D_i) = diam(B_1(d_i)) = 2$. Il en résulte que μ est σ-finie. □

2.2.2. Généralisation du théorème

Notation 2.2.1. *Notons $S(E;r) = \{x \in X \mid \exists y \in E$ tel que $d(x,y) \leq r\}$*

Définition 2.2.4. *Une suite de sous-ensembles $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X est appelée suite μ^*-régulière de paramètre p convergeant vers un point $x \in X$ si :*

- *i)* $\lim_{n\to\infty} diam(V_n) \to 0$
- *ii)* $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$
- *iii)* $\exists p > 0$ *tel que* $\mu^*(V_n) > p\mu^*(S(V_n; (1+p)diam(V_n)))$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2.5. *Une famille $\mathcal{V}$ de sous-ensembles de X est un μ^*-recouvrement de Vitali pour un ensemble $E \subset X$ si $\forall x \in E$, il existe une suite μ^*-régulière $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{V}$ tel que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$.*

Voici maintenant un théorème important pour arriver à notre résultat. Il s'agit d'une extension du théorème classique de recouvrement de Vitali pour des espaces métriques avec mesure σ-finie. Ce résultat fut démontré par Sarkhel [Sa] et nous en omettrons la preuve qui est longue et technique.

Théorème 2.2.2. *(Vitali-Sarkhel) Soit μ^*, une mesure métrique extérieure telle que $\mu = \mu^*|\mathcal{B}_X$ est σ-finie. Soit $\mathcal{V}$, une famille d'ensembles fermés de X qui est un μ^*-recouvrement de Vitali pour un ensemble $E \subset X$. Alors, il existe une famille dénombrable $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{V}$ tel que $\mu^*(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$.*

Voici une définition généralisée de la densité métrique qui nous permettra de généraliser le fameux théorème de la densité métrique de Lebesgue pour un espace métrique séparable.

Définition 2.2.6. *Soient $(X, \mathcal{B}_X, \mu^*)$ un espace métrique, $E \subset X$ et $A \in \mathcal{B}_X$. Notons $m^*(E, A) = \mu^*(E \cap A)/\mu(A)$. On appelera densité métrique extérieure inférieure (resp. supérieure) de E en x, la $\lim_{n\to\infty} \inf\{m^*(E, A)|x \in A,\ \mu(A) < 1/n\}$ (resp. $\lim_{n\to\infty} \sup\{m^*(E, A)|x \in A,\ \mu(A) < 1/n\}$). Dans le cas où la densité métrique extérieure inférieure d'un ensemble E en x est égale à sa densité métrique extérieure supérieure, alors $\lim_{n\to\infty}\{m^*(E, A)|x \in A, \mu(A) < 1/n\}$ est appelée densité métrique extérieure de E en x.*

Théorème 2.2.3. *Soit X un espace métrique séparable muni de la mesure métrique extérieure $\mu*$ construite dans la sous-section précédente. Pour tout ensemble mesurable $A \subset X$, la densité métrique extérieure de A est égale à un, $\forall x \in A$, sauf sur un ensemble de μ-mesure nulle.*

DÉMONSTRATION. Supposons au contraire qu'il existe un ensemble mesurable $A \subset X$ tel que la densité métrique extérieure inférieure de A soit plus petite que un, en des points $x \in A' \subset A$ où $\mu^*(A') > 0$. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que la densité métrique extérieure inférieure est plus petite que $1 - 1/k$ en des points $x \in A'' \subset A' \subset A$ où $\mu^*(A'') = m > 0$, pour un certain $m \in \mathbb{R}$. En vertu de la définition de $\mu*$, on a que $\forall \epsilon > 0$, il existe une famille $\{E_{kn}\}_{k\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{C}_n$ telle que :

- i) $\Sigma_{k=1}^{\infty} \tau(E_{kn}) < \mu_n^*(A) + \epsilon$
- ii) $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{kn}$

Puisque $\mu_k^*(A) \leq \mu_{k+1}^*(A)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, alors $\Sigma_{k=1}^{\infty} \tau(E_{kn}) <$ $\lim_{n\to\infty} \mu_k^*(A) + \epsilon = \mu^*(A) + \epsilon$. Ainsi, il est possible de trouver un ensemble ouvert et donc mesurable $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{kn} \supset A$ tel que :

$$\mu^*(G) < \mu^*(A) + \frac{m}{k} \quad (1)$$

Ainsi, $\forall x \in A''$, il existe une suite de boules fermées $\{B_{jx}\}_{j\in\mathbb{N}}$ contenant x telle que :

- i) $B_{jx} \subset G, \forall j \in \mathbb{N}$
- ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(B_{jx}) = \lim\limits_{j\to\infty} diam(B_{jx}) = 0$
- iii) $\dfrac{\mu * (A \cap B_{jx})}{\mu(B_{jx})} < 1 - \dfrac{1}{k}, \forall j \in \mathbb{N}$

Remarquons que si x_j est le centre de la boule B_{jx}, alors $S(B_{jx}; (1+p)diam(B_{jx})) \subset B_{(3/2+p)diam(B_{jx})}(x_j)$, $\forall p \in \mathbb{R}$. Ainsi, en prenant $p < 1/10$, on aura que $\mu^*(B_{jx}) = \mu(B_{jx}) = diam(B_{jx}) > p(3+2p)diam(B_{jx}) = p\mu^*(B_{(3/2+p)diam(B_{jx})}(x_j)) \geq p\mu^*(S(B_{jx}; (1+p)diam(B_{jx})))$. Ainsi, $\forall x \in A''$, $\{B_{jx}\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite μ^*-régulière et donc, l'ensemble $B = \{B_{jx} | x \in A'', j \in \mathbb{N}\}$ est un μ^*-recouvrement de Vitali pour A''. En vertu du théorème précédent, il existe une famille $\mathcal{F} = \{B_1, B_2, ..., B_n, ...\}$ de sous-ensembles de B tel que $\mu^*(A'' - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$. Posons $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ et remarquons alors que $\mu^*(H) = \mu^*(H) + \mu^*(A'' - H) \geq \mu^*(A'') = m$. Puisque $\mu^*(A \cap B_i)/\mu(B_i) < 1 - 1/k$, alors :

$$\frac{\mu^*(A^c \cap B_i)}{\mu(B_i)} \geq \frac{\mu^*(B_i) - \mu^*(A \cap B_i))}{\mu(B_i)} > 1 - (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k} \quad (2)$$

.

Ainsi, $\mu^*(A^c \cap H) = \mu^*(\cup_{i=1}^{\infty}(A^c \bigcap B_i)) = \Sigma_{i=1}^{\infty}\mu^*(A^c \bigcap B_i)$ (étant donné que A est mesurable et que les B_i sont mesurables et deux à deux disjoints) $>\Sigma_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)/k$ (en vertu de (2)) $= \mu^*(H)/k \geq m/k$. Puisque $H \subset G$, alors

$$\mu^*(A^c \cap G) \geq \frac{m}{k} \quad (3)$$

.

Remarquons que $G = (A \cap G) \cup (A^c \cap G)$, alors en vertu de la mesurabilité de A, on a que $\mu^*(G) = \mu^*(A \cap G) + \mu^*(A^c \cap G) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c \cap G)$. En vertu de (1), il en résulte que $\mu^*(A^c \cap G) < m/k$, ce qui contredit (3). □

Il est possible d'étendre ce théorème pour des ensembles non mesurables. Il s'agit en fait d'un corollaire de ce théorème qui nous permettra de démontrer le résultat principal de cette section.

Corollaire 2.2.1. *Soit X un espace métrique séparable muni de la mesure métrique extérieure $\mu*$ construite dans la sous-section précédente. Pour tout ensemble $A \subset X$, la densité métrique extérieure de A est égale à un, $\forall x \in A$, sauf sur un ensemble de μ-mesure nulle.*

DÉMONSTRATION. Supposons au contraire qu'il existe un ensemble $A' \subset A$ tel que la densité métrique extérieure de A est inférieure à un en tout point $x \in A'$ avec $\mu^*(A') > 0$. Puisque par le théorème 2.2.1, μ^* est régulière, il existe un ensemble mesurable $E \supset A$ tel que $\mu^*(E) = \mu^*(A)$. Soit $B \in \mathcal{B}_X$. Dans ce cas, $\mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(E \cap B)$ et en vertu de la mesurabilité de B, $\mu^*(E \cap B) = \mu^*(E) - \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(A) - \mu^*(A \cap B^c) \leq \mu^*(A \cap B)$. On peut conclure que $\mu^*(E \cap B) = \mu^*(A \cap B)$, $\forall B \in \mathcal{B}_X$. Pour $x \in A'$, on a donc que $\lim_{n\to\infty} \inf\{m^*(A, B) | x \in B, B \in \mathcal{B}_X, \mu(B) < 1/n\} = \lim_{n\to\infty} \inf\{m^*(E, B) | x \in B, B \in \mathcal{B}_X, \mu(B) < 1/n\} < 1$. Ainsi, $\exists A' \subset E$ tel que la densité métrique extérieure inférieure de l'ensemble mesurable E est plus petite que un sur un ensemble de mesure extérieure positive. Ceci entre en contradiction avec le théorème précédent. □

Voici enfin une extension de la définition de la quasi-continuité de Blumberg suivi de la généralisation de son théorème.

Définition 2.2.7. *Soit X un espace métrique muni d'une mesure métrique extérieure μ^* et soit Y un espace topologique. Une fonction $f : X \to Y$ sera quasi-continue au sens de Blumberg en $x_0 \in X$ si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, l'ensemble $E_V = \{x \in X | f(x) \in V\}$ a une densité métrique extérieure égale à un en x_0.*

Théorème 2.2.4. *Soit X un espace métrique séparable muni de la mesure métrique extérieure μ^* construite à la sous-section précédente. Soit Y, un espace topologique satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Toute fonction $f : X \to Y$ est quasi-continue au sens de Blumberg μ-presque partout.*

DÉMONSTRATION. Soit $B(Y) = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages pour la topologie de Y. En vertu du corollaire du théorème précédent, les ensembles $E_i = \{x \in X | f(x) \in B_i\}$ ont une densité métrique extérieure égale à un excepté en des points $x \in T_i \subset E_i$ où $\mu(T_i) = 0$.

Montrons que Q^c, l'ensemble des points où f n'est pas quasi-continue au sens de Blumberg est inclus dans $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$. Soit $x_0 \in Q^c$. Alors $\exists V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ tel que la densité métrique extérieure de l'ensemble $E_V = \{x \in X | f(x) \in V\}$

n'est pas égale à un en x_0. Puisque $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in B_j \subset V$, alors a fortiori, la densité métrique extérieure de l'ensemble $E_j = \{x \in X | f(x) \in B_j\}$ n'est pas égale à un en x_0. Ainsi, $x_0 \in T_j \subset T$. Ceci implique que $\mu^*(Q^c) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_i) \leq \Sigma_{i=1}^{\infty} \mu^*(T_i) = 0$. Alors, $\mu^*(Q^c) = \mu(Q^c) = 0$. □

2.3. Un théorème sur les limites inférieures et supérieures d'une fonction réelle à deux variables réelles

Dans un autre article publié en 1930 [Bl-2], Blumberg présente un théorème relatif aux limites supérieures et inférieures des fonctions $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ selon certaines directions dans le plan $\mathbb{R}^2$. Il s'agit d'un théorème qui peut sembler à première vue non signifiant dans l'étude des propriétés des fonctions réelles quelconques. Pourtant, ce résultat conduit notamment à deux applications intéressantes qui sont en fait des propriétés pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arbitraires. À la suite de ce résultat de Blumberg, nous présenterons ces deux théorèmes dont le premier fut établi par G.C. Young en 1914 [C-Yg] et les deuxième par W.H. Young en 1928 [Yg] de façon tout à fait différente de la méthode utilisée par Blumberg.

Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ et L, une droite traversant le plan. Considérons également une direction d quelconque dans le plan et une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ arbitraire. On notera $l(x_0, d)$ (resp. $u(x_0, d)$), la limite inférieure (resp. la limite supérieure) de la fonction F lorsque x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}^2$ dans la direction d. On notera ensuite $L_d(x_0, r)$, le segment de $\mathbb{R}^2$ de longueur r et de direction d ayant $x_0 \in \mathbb{R}^2$ comme extrémité. Enfin, on notera $P(s, d)$, la projection d'un segment s sur la droite l suivant la direction d. Voici maintenant le théorème de Blumberg.

Théorème 2.3.1. *Soient L une droite de $\mathbb{R}^2$ et $d_1 = \overrightarrow{d_{1,o}, d_{1,f}}$, $d_2 = \overrightarrow{d_{2,o}, d_{2,f}}$ deux vecteurs situés du même côté de la droite et dont $d_{1,f}$ et $d_{2,f}$ sont des points de L. Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'ensemble $D = \{x \in L | l(x, d_1) > u(x, d_2)\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Posons $E_k = \{x \in L | l(x, d_1) \geq k, k \in \mathbb{R}\}$. Si $x \in E_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un segment $L_{d_1}(x, r_n)$ où $r_n < 1/n$ et tel que $F(y) > k - 1/n$, $\forall y \in L_{d_1}(x, r_n) - \{y_n, x\}$ (y_n étant l'autre extrémité du segment). En effet, s'il existait un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall 0 < \delta < 1/n_0$, $\exists x' \in L_{d_1}(x,\delta) - \{x_\delta, x\}$ tel que $F(x') \leq k - 1/n_0$, il existerait une suite $\{x'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x où $F(x'_j) \leq k - 1/n_0$. Par définition, on aurait alors que $l(x,d_1) < k$, ce qui est absurde.

Soient

$F_{kn} = \{x \in L | \exists x_0 \in E_k$ tel que x est un point extrémité de $P(L_{d_1}(x_0, r_n), d_2)\}$

$I_{kn} = \{x \in L | \exists x_0 \in E_k$ tel que x est un point intérieur de $P(L_{d_1}(x_0, r_n), d_2)\}$

Posons $D_{kn} = F_{kn} \bigcap I^c_{kn}$. Cet ensemble est au plus dénombrable. En effet, $\forall x \in D_{kn}$, x est un point extrémité de $P(L_{d_1}(x, r_n), d_2)$. Par définiton de D_{kn}, $D_{kn} \bigcap int(P(L_{d_1}(x, r_n), d_2)) = \emptyset$, $\forall x \in D_{kn}$. Ainsi, la cardinalité de D_{kn} est au plus égale à la cardinalité d'une famille d'intervalles ouverts disjoints sur une droite en bijection avec la droite réelle. Ainsi, D_{kn} est au plus dénombrable et a fortiori, il en est de même pour l'ensemble $D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{kn}$.

Si $x_0 \in E_k - D_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in E_k$ tel que $x_0 \in int(P(L_{d_1}(x_n, r_n), d_2))$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in L_{d_1}(x_n, r_n)$ tel que :

- i) La projection du point y_n sur la droite L suivant la direction d_2 est le point x_0
- ii) $F(y_n) > k - \dfrac{1}{n}$

Il en résulte que $u(x, d_2) \geq k$.

Considérons l'ensemble $D' = \bigcup_{k\in\mathbb{Q}} D_k$ qui sera, en vertu de ce qui précède, au plus dénombrable. Il suffira donc de montrer que si $x_0 \in D$, alors $x_0 \in D'$. Si $x_0 \in D$, alors $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que $l(x_0, d_1) > r > u(x_0, d_2)$. Ainsi, $x_0 \notin E_r - D_r$ et $x \in E^c_r \bigcup D_r$. Or, il est impossible que $x_0 \in E^c_r$ étant donné que $l(x_0, d_1) > r$. Il en résulte que $x_0 \in D_r \subset D'$. $\square$

C'est le corollaire suivant qui nous permettra d'obtenir les démonstrations des théorèmes de G. C. Young et de W. H. Young.

Corollaire 2.3.1. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction symétrique par rapport à ses variables indépendantes (i.e. $F(x,y)=F(y,x)$). Les ensembles*

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R} | \limsup_{h\to 0^+} F(x-h, x) < \liminf_{h\to 0^+} F(x+h, x)\}$$

et

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R} | \limsup_{h \to 0^+} F(x+h,x) < \liminf_{h \to 0^+} F(x-h,x)\}$$

sont au plus dénombrables.

DÉMONSTRATION. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, considérons la droite $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$. Prenons comme direction d_1, les segments parallèles à l'axe des x pointant vers les positifs et comme direction d_2, les segments parallèles à l'axe des y et pointant vers les négatifs. Étant donné que ces deux directions pointent les points de la droite L du même côté de cette dernière, en vertu du théorème précédent, l'ensemble $D_1 = \{x \in L | l(x,d_1) > u(x,d_2)\}$ est au plus dénombrable. Par définition, on a $\forall x \in L$ que :

- $l(x,d_1) = \liminf_{h \to 0^+} F(x+h,x)$
- $u(x,d_2) = \limsup_{h \to 0^+} F(x,x-h)$

Puisque F est symétrique, il en résulte que $E_1 = D_1$ est au plus dénombrable. En gardant la même définition de L et en modifiant les définitions de d_1 et d_2, on obtiendrait par le même raisonnement que E_2 est au plus dénombrable. □

Le théorème de G. C. Young se rapporte aux dérivées de Dini d'une fonction arbitraire réelle de variable réelle. Avant d'énoncer et de démontrer ce théorème, rappelons les définitions des quatre dérivées de Dini pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- $D_f^+(x) = \limsup_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- $D_f^-(x) = \limsup_{h \to 0^+} \dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h}$
- $D_{+f}(x) = \liminf_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- $D_{-f}(x) = \liminf_{h \to 0^+} \dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h}$

Théorème 2.3.2. *(G. C. Young) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} | D_f^+(x) < D_{-f}(x)$ et $D_f^-(x) < D_{+f}(x)\}$ est au plus dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $F(x,y) = (f(x) - f(y))/(x-y)$. On aura évidemment que $F(x,y) = F(y,x)$ et en vertu du corollaire précédent, les ensembles $E_1 = \{x \in \mathbb{R} | D^-_f(x) < D_{+f}(x)\}$ et $E_2 = \{x \in \mathbb{R} | D^+_f(x) < D_{-f}(x)\}$ sont au plus dénombrable. Il en résulte que $D = E_1 \bigcup E_2$ est au plus dénombrable.

□

Le théorème de W. H. Young se rapporte aux points limites à gauche et à droite d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque. Avant d'énoncer et de démontrer le théorème, définissons ce que W. H. Young entendait par point limite à gauche et à droite d'une fonction en un point x_0 donné.

Définition 2.3.1. *Un point $y \in \mathbb{R}$ sera appelé point limite à gauche (resp. à droite) de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en x_0 s'il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 telle que $x_n < x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ (resp. $x_n > x_0, \forall n \in \mathbb{N}$) et telle que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. On notera $L^-(f, x_0)$ (resp. $L^+(f, x_0)$), l'ensemble des points limites à gauche (resp. à droite) de la fonction f en x_0.*

Théorème 2.3.3. *(W. H. Young) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'ensemble $D' = \{x \in \mathbb{R} | L^+(f, x_0) \neq L^-(f, x_0)\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Définissons d'abord la fonction $F_{f,p,q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$F_{f,p,q}(x,y) = \begin{cases} \sup\{f(z) | z \in (x,y), f(z) \in [p,q], p, q \in \mathbb{R}\} & \text{si } \exists z \in (x,y) \\ & \text{tel que } f(z) \in [p,q], \\ p & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Par définition, on voit que $F_{f,p,q}(x,y) = F_{f,p,q}(y,x)$. Pour un $x \in \mathbb{R}$, considérons les suites $\{F_{f,p,q}(x, x+1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{F_{f,p,q}(x, x-1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition de la fonction $F_{f,p,q}$, ces suites sont monotones décroissantes et bornées. Donc, leurs limites respectives existent. Il en résulte que $\liminf_{h\to 0^+} F_{f,p,q}(x, x+h) = \limsup_{h\to 0^+} F_{f,p,q}(x, x+h)$ et que $\liminf_{h\to 0^+} F_{f,p,q}(x, x-h) = \limsup_{h\to 0^+} F_{f,p,q}(x, x-h)$. Ainsi, en vertu du corollaire précédent, l'ensemble $D_{p,q} = \{x \in \mathbb{R} | \lim_{h\to 0^+} F_{f,p,q}(x, x-h) \neq \lim_{h\to 0^+} F_{f,p,q}(x, x+h)\}$ est au plus dénombrable. Soit $D = \bigcup_{p<q\in\mathbb{Q}} D_{p,q}$ qui est au plus dénombrable. Il suffira de montrer que si $x_0 \in D'$, alors $x_0 \in D$. Si $x_0 \in D'$, on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe un point $y_0 \in \mathbb{R}$ qui est un point limite à droite de f au

point x_0 sans être un point limite à gauche. Ainsi, par définition du point limite à gauche, $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $r_1 < y_0 < r_2$ et $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, on a que $f(x) \notin (r_1, r_2)$. Par définition, on a donc que $\lim_{h\to 0} F_{f,r_1,r_2}(x_0, x_0 - h) = r_1 < y \leq \lim_{h\to 0} F_{f,r_1,r_2}(x_0, x_0 + h)$. Ainsi, $x_0 \in D_{r_1,r_2} \subset D$. □

Remarquons que la limite supérieure (resp. inférieure) à gauche (resp. à droite) de la fonction en un point x_0 est en fait le suprémum (resp. l'infimum) des points limites à gauche (resp. à droite) de la fonction en x_0. Ainsi, si $\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \neq \limsup_{x\to x_0^-} f(x)$ (resp. $\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \neq \liminf_{x\to x_0^-} f(x)$), alors $\sup L^+(f, x_0) \neq \sup L^-(f, x_0)$ (resp. $\inf L^+(f, x_0) \neq \inf L^-(f, x_0)$) et donc, $L^+(f, x_0) \neq L^-(f, x_0)$. Ainsi, on obtient le résultat suivant qui fut également obtenu par W. H. Young.

Corollaire 2.3.2. *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les ensembles $D_i = \{x \in \mathbb{R} | \liminf_{x\to x_0^+} f(x) \neq \liminf_{x\to x_0^-} f(x)\}$ et $D_s = \{x \in \mathbb{R} | \limsup_{x\to x_0^+} f(x) \neq \limsup_{x\to x_0^-} f(x)\}$ sont au plus dénombrables.*

Mentionnons, afin de conclure cette section et ce chapitre, que la technique induite par ce théorème de Blumberg fut réinvestie par d'autres mathématiciens au cours des années subséquentes. Par exemple, Zajicek l'utilisa en 1981 [Za] pour extendre un résultat relatif aux dérivées de Dini des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconques.

Chapitre 3

LES PRINCIPALES CONTRIBUTIONS D'ALEXANDRE FRODA ET SES GÉNÉRALISATIONS

3.1. Un théorème sur les discontinuités de première espèce

C'est dans sa thèse de doctorat parue en 1929 qu'Alexandre Froda [F-1] démontre que l'ensemble $D_1(f)$ des discontinuités de première espèce de toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est au plus dénombrable. Rappelons la définition d'une discontinuité de première espèce pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition 3.1.1. *Un point x sera appelé discontinuité de première espèce si f est discontinue en x et que $\lim_{z\to x^+} f(z)$ et $\lim_{z\to x^-} f(z)$ existent.*

Ce théorème de Froda peut être généralisé pour toute fonction $f : X \to Y$ où X et Y sont des espaces de Hausdorff satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Avant d'arriver à ce résultat plus général dont la preuve est dûe à Esanu [E], nous avons besoin de trois définitions préliminaires.

Définition 3.1.2. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dira que X est bien ordonné en rapport à sa topologie $\mathcal{T}$ si l'on peut bien ordonner X de sorte que $\forall x_0 \in X$ et $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists x', x'' \in V$ tel que $x' < x_0 < x''$.*

Définition 3.1.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique bien ordonné en rapport à sa topologie $\mathcal{T}$ et soit Y un espace topologique. On dira qu'une fonction $f : X \to Y$ possède une limite à droite (resp. à gauche) en $x_0 \in X$ égale à un certain*

$L^+(x_0) \in Y$ *(resp.* $L^-(x_0) \in Y$*) si* $\forall V \in \mathcal{V}(L^+(x_0))$, $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ *tel que si* $x \in U \bigcap \{z \in X | z > x_0\}$ *(resp. si* $x \in U \bigcap \{z \in X | z < x_0\}$*), alors* $f(x) \in V$.

Définition 3.1.4. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique bien ordonné en rapport à sa topologie* $\mathcal{T}$ *et soit* Y *un espace topologique. On dira qu'un point* $x_0 \in X$ *est une discontinuité de première espèce d'une fonction* $f : X \to Y$, *si* f *est discontinue en* x_0 *et si les limites à droite et à gauche de* f *existent en* x_0 *selon la définition 3.1.3.*

Voici maintenant le théorème.

Théorème 3.1.1. *(Froda-Esanu) Soient* X *et* Y *des espaces de Hausdorff satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Si* $(X, \mathcal{T})$ *est bien ordonné en rapport à sa topologie* $\mathcal{T}$, *alors toute fonction* $f : X \to Y$ *a un ensemble* $D_1(f)$ *de discontinuités de première espèce au plus dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soient $B(X) = \{B_{X_i}\}_{i \in N}$ et $B(Y) = \{B_{Y_i}\}_{i \in N}$ des bases dénombrables de voisinages pour les topologies de X et Y.

Posons

$$D_g := \{x \in D_1(f) | f(x) \neq L^-(x)\}$$

$$D_d := \{x \in D_1(f) | f(x) \neq L^+(x)\}$$

Ainsi, $D_1(f) \subset D_g \cup D_d$ et il suffira de démontrer que D_d est dénombrable (on obtiendrait un résultat équivalent avec D_g). Soit $x_0 \in D_d$. Ainsi, $f(x_0) \neq L^+(x_0)$ et puisque Y est un espace de Hausdorff, alors $\exists V_{f(x_0)} \in \mathcal{V}(f(x_0))$ et $\exists V_{L^+(x_0)} \in \mathcal{V}(L^+(x_0))$ tel que :

- $V_{f(x_0)}, V_{L^+(x_0)} \in B(Y)$
- $V_{f(x_0)} \cap V_{L^+(x_0)} = \emptyset$

En vertu de la définition 3.1.3, pour $V_{L^+(x_0)}$, $\exists U_{x_0} \in B(X)$ tel que si $x \in U_{x_0} \cap \{z \in X | z > x_0\}$, alors $f(x) \in V_{L^+(x_0)}$ et $f(x) \notin V_{f(x_0)}$. Ainsi, pour $x_0 \in D_d$, $\exists V_{f(x_0)} \in B(Y)$ et $\exists U_{x_0} \in B(X)$ tel que :

$$((U_{x_0} \cap \{z \in X | z > x_0\}) \times V_{f(x_0)}) \bigcap \Gamma_f = \emptyset \quad (*)$$

Où $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$ est le graphe de f dans $X \times Y$.

Pour chaque $x \in D_d$, fixons $V_{f(x)} \in B(Y)$ et $U_x \in B(X)$ de sorte que (*) soit satisfaite et définissons l'application $v : D_d \to B(Y)\,;\, v(x) = V_{f(x)}$. Puisque $B(Y)$ est dénombrable, il suffira de démontrer que $v^{-1}(V)$ est dénombrable $\forall V \in v(D_d)$. Soit $V \in v(D_d)$ fixé. Définissons maintenant l'application $u : v^{-1}(V) \to B(X)\,;\, u(x) = U_x$. Puisque $B(X)$ est dénombrable, il suffira de montrer que u est injective, i.e. si $U_{x_0} = U_z$, alors $x_0 = z$. Supposons au contraire et sans perte de généralité que $x_0 < z$. Puisque $x_0, z \in v^{-1}(V)$, alors $V_{f(x_0)} = v(x_0) = V = v(z) = V_{f(z)}$. Ainsi, $f(z) \in V_{f(x)}$. Puisque $U_{x_0} = U_z$, alors $z \in U_{x_0}$ et comme $x_0 < z$, alors $z \in U_{x_0} \cap \{z \in X | z > x_0\}$. Ainsi, on a que $(z, f(z)) \in (U_{x_0} \cap \{z \in X | z > x_0\}) \times V_{f(x_0)}$. Ceci contredit (*) et donc, $u : v^{-1}(V) \to B(X)$ est injective $\forall V \in v(D_d)$. Il en résulte que D_d est dénombrable. $\square$

On peut maintenant établir la réciproque du dernier théorème.

Théorème 3.1.2. *Soient X et Y des espaces de Hausdorff satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité où $(X, \mathcal{T})$ est bien ordonné en rapport à sa topologie $\mathcal{T}$. Soit D un sous-ensemble fini ou dénombrable de X. Alors, il existe une fonction $f : X \to Y$ tel que f est continue sur D^c et tel que D est l'ensemble des discontinuités de première espèce de f.*

DÉMONSTRATION. Soit y_0 un point quelconque de Y. Puisque Y satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité, alors en vertu du rappel 2.1.2, Y possède une partie dense dénombrable A. Puisque Y satisfait le premier axiome de dénombrabilité, alors en vertu du rappel 2.1.1, il existe une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A (différents de y_0) qui converge vers y_0.

Si D est fini, alors $card(D) = N$ pour un certain $N < \infty$. Ainsi, il existe une bijection $\phi : D \to \{1, 2, ..., N\}$. Si D est dénombrable, alors il existe une bijection $\phi : D \to \mathbb{N}$. À partir de ces remarques, nous pouvons définir une fonction $f : X \to Y$ qui satisfera aux conditions désirées, que D soit fini ou dénombrable. Soit $f : X \to Y$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x \in D^c, \\ y_i & \text{si } \phi(x) = i. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Montrons que f est la fonction désirée si D est dénombrable (le cas fini suit le même raisonnement).

1)Montrons d'abord que f est continue en $x_0 \in D^c$.

Soit $V \in \mathcal{V}(y_0)$. Puisque $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y_0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, on a que $y_n \in V$. Posons $x_i = \phi^{-1}(i)$. Puisque X est un espace de Hausdorff, alors pour $1 \leq i \leq N$, $\exists U_i \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $x_i \notin U_i$. Ainsi, $U = \bigcap_{i=1}^{N} U_i \in \mathcal{V}(x_0)$ et donc, $\forall x \in U$, $f(x) \in V$. Ceci démontre la continuité de f en x_0.

2)Montrons que f n'est pas continue en $x_i = \phi^{-1}(i)$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$.

Puisque Y est un espace de Hausdorff, alors $\exists V_0 \in \mathcal{V}(y_0)$ et $\exists V_i \in \mathcal{V}(y_i)$ tel que

$$V_0 \bigcap V_i = \emptyset \quad (*)$$

Remarquons que pour $V_0 \in \mathcal{V}(y_0)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, on a que $y_n \in V_0$. Par le même raisonnement qu'en 1), on peut trouver un voisinage $U \in \mathcal{V}(x_i)$ tel que $x_j \notin U$, $\forall j \in \{1, 2, ..., N\} - \{i\}$. On peut conclure que $\forall V \in \mathcal{V}(x_i)$, $\exists x \in V$ tel que $f(x) \notin V_i$. En effet, pour un certain $V \in \mathcal{V}(x_i)$, $V \bigcap U \in \mathcal{V}(x_i)$ et puisque X est bien ordonné en rapport à sa topologie $\mathcal{T}$, alors on peut prendre $x \in V \bigcap U \bigcap \{z \in X | z > x_i\}$ où $f(x) \in V_0$ et donc, en vertu de (*), $f(x) \notin V_i$. Ainsi, f n'est pas continue en x_i.

3)Montrons enfin que les limites à droite et à gauche de f en x_i tendent vers y_0.

Soit $V \in \mathcal{V}(y_0)$. Alors, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, on a que $y_n \in V$. Prenons $U \in \mathcal{V}(x_i)$ tel que $x_j \notin U$, $\forall j \in \{1, 2, ..., N\} - \{i\}$. Dans ce cas, si $x \in U \bigcap \{z \in X | z > x_i\}$ ou si $x \in U \bigcap \{z \in X | z < x_i\}$, alors $f(x) \in V$. Ainsi, x_i est une discontinuité de première espèce. $\square$

3.2. Un théorème sur les points limites d'une fonction

Dans cette section, nous généralisons un autre théorème démontré par Froda dans sa thèse. Ce théorème est relatif aux points limites d'une fonction et Froda l'avait démontré pour le cas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La définition de point limite qu'il a introduite est la même que celle utilisée W. H. Young pour démontrer son théorème sur les points limites à gauche et à droite d'une fonction réelle d'une variable réelle que nous avons démontré au chapitre précédent. Nous présentons une nouvelle définition de point limite pour des fonctions ayant comme domaine et co-domaine des espaces topologiques quelconques. Il s'agit d'une adaptation de la définition que Froda avait donnée. Nous présentons ensuite la généralisation du théorème.

Définition 3.2.1. *Soient X et Y des espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une fonction. On dira que $y \in Y$ est un point limite de f en $x \in X$ s'il existe une suite de points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ tel que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$. On appelera L(f,x), l'ensemble des points limites de f en x.*

Théorème 3.2.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Pour toute fonction $f : X \to Y$, l'ensemble $D = \{x_0 \in X | f(x_0) \notin L(f, x_0)\}$ est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Soient $x_0 \in D$ et $(x_0, f(x_0)) \in X \times Y$. Notons $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$, le graphe de f dans $X \times Y$. Nous cherchons à montrer qu'il existe $V \in \mathcal{V}((x_0, f(x_0)))$ tel que $V \cap \Gamma_f = (x_0, f(x_0))$. Supposons au contraire que $\forall V \in \mathcal{V}((x_0, f(x_0)))$, $\exists (x, f(x)) \in \Gamma_f \cap V$ tel que $(x, f(x)) \neq (x_0, f(x_0))$. Par conséquent, $(x_0, f(x_0)) \in \overline{\Gamma_f - \{(x_0, f(x_0))\}}$. En vertu du rappel 2.1.3, $X \times Y$ satisfait au premier axiome de dénombrabilité et donc, en vertu du rappel 2.1.1, il existe une suite $\{(x_n, f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\Gamma_f - \{(x_0, f(x_0))\}$ qui converge vers $(x_0, f(x_0))$. Il existe donc une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$ où $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(x_0)$. Ainsi, $f(x_0) \in L(f, x_0)$, ce qui est absurde.

Soit $B(X \times Y) = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de $X \times Y$ pour sa topologie. Alors, $\forall x_0 \in D$, $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que :

- $(x_0, f(x_0)) \in B_i \subset V$

– $B_i \bigcap \Gamma_f = (x_0, f(x_0))$

Il en résulte que $card(D) \leq card(B(X \times Y))$ et que D est fini ou dénombrable.

□

À partir des deux définitions suivantes, nous établirons un corollaire du dernier théorème qui nous servira dans la prochaine section de ce chapitre.

Définition 3.2.2. *Soient X et Y des espaces topologiques. On dira qu'une fonction $f : X \to Y$ possède une limite $l \in Y$ en un point $x_0 \in X$ si $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in U - \{x_0\}$, $f(x) \in V$. On notera $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.*

Définition 3.2.3. *Soient X et Y des espaces topologiques. On dira qu'une fonction $f : X \to Y$ possède une discontinuité déplaçable en x_0 si f n'est pas continue en ce point et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, pour un certain $l \in Y$.*

Corollaire 3.2.1. *Toute fonction $f : X \to Y$ où X et Y satisfont le deuxième axiome de dénombrabilité possède un ensemble $D_r(f)$ de discontinuités déplaçables fini ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in D_r(f)$. Puisque, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, pour un certain $l \in Y$, alors pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to x_0$, $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \to l$. En vertu de la définition 3.2.1, $L(f, x_0) = l$ et $f(x_0) \neq l$. En vertu du théorème précédent, $D_r(f)$ est fini ou dénombrable. □

Remarque 3.2.1. Dans le cas où $(X, \mathcal{T})$ est bien ordonné en rapport à sa topologie $\mathcal{T}$ (comme dans le cas où $X = \mathbb{R}$ par exemple), on remarque que les discontinuités déplaçables sont un cas particulier des discontinuités de première espèce. Avec cette condition supplémentaire, le corollaire est en fait une conséquence immédiate du théorème de Froda-Esanu.

3.3. Classification des discontinuités avec la fonction oscillation

Toujours dans sa thèse de doctorat, Froda classa les discontinuités des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en trois genres distincts. Pour sa classification, il s'est servi de la fonction oscillation $\omega(f, x)$ définie de la façon suivante pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\omega(f,x) = M(f,x) - m(f,x)$$

où :

$$M(f,x) = \inf_{V\in\mathcal{V}(x)}\{\sup_{x'\in V} f(x')\} \quad (*)$$

$$m(f,x) = \sup_{V\in\mathcal{V}(x)}\{\inf_{x''\in V} f(x'')\} \quad (**)$$

On peut réécrire $\omega(f,x)$ de la façon suivante :

$$\omega(f,x) = \inf_{V\in\mathcal{V}(x)}\{\sup_{x',x''\in V} d(f(x'),f(x''))\} \quad (***)$$

Écrite de cette façon, on constate que cette définition peut être étendue pour une fonction $f : X \to Y$ où X est topologique et Y est métrique. Les définitions que Froda a données pour les discontinuités de genre I, II, III resteront inchangées pour $f : X \to Y$. La seule différence est que nous utiliserons (***) comme définition de la fonction oscillation. Afin de démontrer que les définitions énoncées s'appliqueront bien à des points de discontinuités, démontrons la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Soit $f : X \to Y$ où X est topologique et Y est métrique. f est continue en $x \Leftrightarrow \omega(f,x) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Si f est continue en x, alors $\forall\epsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall x' \in V$, on a $d(f(x'),f(x)) < \epsilon/2$. Ainsi, $\forall x',x'' \in V$, on a $d(f(x'),f(x'')) < \epsilon$. Par conséquent, $\sup_{x',x''\in V}\{d(f(x'),f(x''))\} < \epsilon$. Ainsi, $\forall\epsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\sup_{x',x''\in V}\{d(f(x'),f(x''))\} < \epsilon$ et donc, $\omega(f,x) = 0$. Si maintenant $\omega(f,x) = 0$, alors $\forall\epsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ tel que l'on a $\sup_{x',x''\in V}\{d(f(x'),f(x''))\} < \epsilon$ et donc, $\forall x' \in V$, $d(f(x'),f(x)) < \epsilon$. □

Dans les trois définitions de la classification, on supposera bien évidemment que X est topologique et que Y est métrique.

Définition 3.3.1. *Un point $x_0 \in X$ sera appelé discontinuité de genre I de $f : X \to Y$ si $\lim_{x\to x_0}\omega(f,x)$ existe et si $\lim_{x\to x_0}\omega(f,x) > \omega(f,x_0)$.*

Définition 3.3.2. *Un point $x_0 \in X$ sera appelé discontinuité de genre II de $f : X \to Y$ si $\lim_{x\to x_0}\omega(f,x)$ n'existe pas.*

Définition 3.3.3. *Un point $x_0 \in X$ sera appelé discontinuité de genre III de $f : X \to Y$ si $\lim_{x \to x_0} \omega(f,x)$ existe et si $\lim_{x \to x_0} \omega(f,x) = \omega(f,x_0) \neq 0$.*

À partir des définitions précédentes, il est aisé de voir que les points de discontinuité de $f : X \to Y$ sont tous de genre I, II ou III. Voici maintenant un premier résultat généralisant celui que Froda avait énoncé pour les discontinuités de genre I de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le corollaire de la section précédente simplifie grandement la démonstration.

Proposition 3.3.2. *Soit X un espace topologique satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité et soit Y un espace métrique. Toute fonction $f : X \to Y$ a un ensemble $D_I(f)$ de discontinuités de genre I fini ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in D_I(f)$. Par définition, $lim_{x \to x_0} \omega(f,x) > \omega(f,x_0) > 0$. En vertu de la définition 3.2.3, la fonction $\omega : X \to \mathbb{R}$ où $\omega(x) := \omega(f,x)$ possède une discontinuité déplaçable en x_0. Ainsi, $D_I(f) \subset D_r(\omega)$ et en vertu du corollaire 3.2.1, $D_I(f)$ est fini ou dénombrable. □

Avant d'arriver aux propositions de Froda relatives aux deux autres genres de discontinuités, introduisons une définition et trois lemmes.

Définition 3.3.4. *Soit X un espace topologique. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) en un point $x_0 \in X$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in V$, on a que $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ (resp. $f(x) > f(x_0) - \epsilon$).*

Les définitions (*) et (**) de $M(f,x)$ et $m(f,x)$ s'étendent aussi pour $f : X \to \mathbb{R}$ où X est topologique. Dans ce cas, il est facile de voir que si f est semi-continue supérieurement en x_0 (resp. semi-continue inférieurement), alors $f(x_0) = M(f,x_0)$ (resp. $f(x_0) = m(f,x_0)$).

Lemme 3.3.1. *Soit $f : X \to Y$ où X est topologique et Y est métrique. Alors $\omega : X \to \mathbb{R}$ où $\omega(x) = \omega(f,x)$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. En vertu de la définition de $\omega(f,x)$ en x_0, $\forall \epsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que l'on a $\omega(f,x_0) > \sup_{x',x'' \in V}\{d(f(x'),f(x''))\} - \epsilon$. $\forall y \in V$, on a que $\omega(f,y) \leq \sup_{x',x'' \in V}\{d(f(x'),f(x''))\}$ et par conséquent, $\omega(f,x_0) > \omega(f,y) - \epsilon$. Ainsi, ω est semi-continue supérieurement. $\square$

Lemme 3.3.2. *Soit X un espace topologique. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement, alors les ensembles $D_k = \{x \in X | f(x) \geq k\}$ sont fermés $\forall k \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit y un point limite de D_k. Il faut montrer que $y \in D_k$. Puisque f est semi-continue supérieurement en y, alors pour un $\epsilon > 0$ donné, $\exists V \in \mathcal{V}(y)$ tel que $\forall x \in V$, on a que $f(y) > f(x) - \epsilon$. Puisque y est un point limite de D_k, alors $\exists x' \in V$ où $x' \neq y$ tel que $f(x') \geq k$. Par conséquent, $f(y) > k - \epsilon$. Ainsi, $f(y) \geq k$ étant donné que ϵ est arbitraire et donc, $y \in D_k$. $\square$

Avant de démontrer l'autre lemme, remarquons qu'à l'aide des deux lemmes précédents et de la proposition 3.3.1, il serait facile de démontrer que pour toute fonction allant d'un espace topologique vers un espace métrique, l'ensemble de ses points de discontinuité est de type F_σ.

Lemme 3.3.3. *Soit X un espace de Baire et $f : X \to \mathbb{R}$, une fonction semi-continue supérieurement qui est bornée inférieurement. L'ensemble des points de discontinuités $D(f)$ de la fonction est de première catégorie.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\omega(f,x) = M(f,x) - m(f,x)$. Puisque f est semi-continue supérieurement, on aura que $f(x) = M(f,x)$ et donc, que $\omega(f,x) = f(x) - m(f,x)$.

Montrons que l'ensemble $D_k = \{x \in X | \omega(f,x) \geq 1/k\}$ est non-dense dans X, $\forall k \in \mathbb{N}$. En vertu des deux lemmes précédents, $\omega(f,x)$ est semi-continue supérieurement et D_k est fermé. Il suffira donc de montrer que D_k ne contient aucun voisinage ouvert. Supposons au contraire qu'il existe un ouvert U tel que $U \subset D_k$. Soit $x_0 \in U$. Par définition de $m(f,x_0)$, $\exists x_1 \in U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(x_1) < m(f,x_0) + \epsilon_0$, pour un certain ϵ_0 que l'on prendra plus petit que $1/k$. Puisque $\omega(f,x_0) = f(x_0) - m(f,x_0) \geq 1/k$, alors $f(x_1) < f(x_0) - (1/k - \epsilon_0)$. Ensuite, on peut choisir un point $x_2 \in U$ tel que $f(x_2) < m(f, x_1) + \epsilon_0$. Par conséquent, $\exists x_2 \in U$ tel que $f(x_2) < f(x_0) - 2(1/k - \epsilon_0)$. En poursuivant ce procédé n fois, on trouvera qu'il existe un $x_n \in U$ tel que $f(x_n) < f(x_0) - n(1/k - \epsilon_0)$. En laissant tendre n vers l'infini, on voit que f est non bornée inférieurement, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse initiale. Ainsi, D_k est non-dense $\forall k \in \mathbb{N}$. En vertu de la proposition 3.3.1, $D(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ et donc, $D(f)$ est de première catégorie. $\square$

Voici enfin la généralisation des deux propositions de Froda sur les discontinuités de genre II et III.

Proposition 3.3.3. *Soient X un espace de Baire et Y un espace métrique. Toute fonction $f : X \to Y$ a un ensemble $D_{II}(f)$ de discontinuités de genre II de première catégorie.*

Démonstration. Soit $x_0 \in D_{II}(f)$. Par définition, $\lim_{x \to x_0} \omega(f, x)$ n'existe pas. Ainsi, la fonction $\omega : X \to \mathbb{R}$ où $\omega(x) := \omega(f, x)$ n'est pas continue en x_0. Par conséquent, $D_{II}(f) \subset D(\omega)$ et en vertu des lemmes 3.3.1 et 3.3.3, $D_{II}(f)$ est de première catégorie. $\square$

Proposition 3.3.4. *Soient X un espace de Baire et Y un espace métrique. Toute fonction $f : X \to Y$ a un ensemble $D_{III}(f)$ de discontinuités de genre III vide ou bien de deuxième catégorie.*

Démonstration. Si f est continue, $D_{III}(f)$ est évidemment vide. Il reste à montrer que si $D_{III}(f)$ est non vide, il est de deuxième catégorie. Soit $x_0 \in D_{III}(f)$. Par définition, $\lim_{x \to x_0} \omega(f, x) = \omega(f, x_0) = \alpha > 0$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\forall \epsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in V$, on a $\omega(f, x) > \alpha - \epsilon$. Choisissons ϵ_0 de sorte que $\alpha - \epsilon_0 > \alpha/2$. Par conséquent, on peut prendre U, un voisinage ouvert de x_0 de sorte que $\omega(f, x) > \alpha/2$, $\forall x \in U$. Soit $D(\omega, U)$, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $\omega : X \to \mathbb{R}$ où $\omega(x) := \omega(f, x)$ dans le voisinage U. En vertu des lemmes 3.3.1 et 3.3.3, $D(\omega, U)$ est de première catégorie. Puisque U est ouvert, alors $U \cap D(\omega, U)^c$ est de deuxième catégorie étant donné que X est un espace de Baire. Si $x \in U \cap D(\omega, U)^c$, alors $\omega : X \to \mathbb{R}$ est continue en x et donc, $\lim_{y \to x} \omega(f, y) = \omega(f, x)$. Puisque $x \in U$, alors $\lim_{y \to x} \omega(f, y) = \omega(f, x) > \alpha/2 > 0$. Ainsi, $U \cap D(\omega, U)^c \subset D_{III}(f)$ et dans ce cas, $D_{III}(f)$ est de deuxième catégorie. $\square$

3.4. Classification des discontinuités avec l'oscillation d'ordre α

Dans un article paru en 1955, Froda [F-2] poursuit sa classification des discontinuités pour des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quelconques. Comme il l'avait fait pour la classification des discontinuités en trois genres dans sa thèse, il fait appel à la notion d'oscillation de la fonction. La différence avec la précédente classification est d'abord qu'il utilise maintenant la fonction $\omega_0(f, x)$ qui diffère légèrement de l'autre fonction oscillation $\omega(f, x)$. Ensuite, il définit maintenant l'oscillation d'ordre α pour une fonction. Nous allons adapter ces autres définitions de discontinuités pour une fonction $f : X \to Y$ où X est un espace topologique et Y est un espace métrique, en nous basant sur la définition de la fonction oscillation posée au point (***) de la section précédente. On définit d'abord la fonction $\omega_{0f} : X \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\omega_0(f, x) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \{ \sup_{x', x'' \in V - \{x\}} d(f(x'), f(x'')) \} \quad (****)$$

La différence avec la définition (***) est qu'on exclut maintenant le point x pour calculer l'oscillation. On définit ensuite, par induction, l'oscillation d'ordre α de la fonction f en un point $x_0 \in X$ en posant $\omega_0^\alpha(f, x_0) = \omega_0(\omega_0^{\alpha-1}(f, x_0))$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$. On dira par convention que $\omega_0^0(f, x_0) = \omega_0(f, x_0)$. À partir de cette nouvelle définition, nous pouvons maintenant adapter les définitions que Froda avait données pour classer les discontinuités en « discontinuités réductibles d'ordre α » ou en « discontinuités irréductibles ». On supposera bien sûr que X est topologique et que Y est métrique.

Définition 3.4.1. *Un point $x_0 \in X$ sera appelé discontinuité réductible d'ordre α, si $\omega_0^\alpha(f, x_0) = 0$ et si $\omega_0^{\alpha'}(f, x_0) > 0$, $\forall \alpha' < \alpha$.*

Définition 3.4.2. *Un point $x_0 \in X$ sera appelé discontinuité irréductible si $\omega_0^\alpha(f, x_0) > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$.*

Dans son article, Froda démontra premièrement que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'ensemble des discontinuités réductibles d'ordre α est au plus dénombrable si $\alpha > 1$ et deuxièmement, que l'ensemble des discontinuités irréductibles est de première catégorie. Nous proposons de généraliser ce dernier résultat pour des fonctions $f : X \to Y$ où X est un espace de Baire et Y est un espace métrique en nous servant de certains résultats démontrés à la section précédente.

Théorème 3.4.1. *Soient X un espace de Baire et Y un espace métrique. Pour toute fonction $f : X \to Y$, l'ensemble $D_i(f)$ des discontinuités irréductibles est de première catégorie.*

DÉMONSTRATION. Si $x_0 \in D_i(f)$, alors $0 < \omega_0^1(f, x_0) = \omega_0(\omega_0(f, x_0)) \leq \omega(\omega_0(f, x_0))$. En vertu de la proposition 3.3.1, la fonction $\omega_0 : X \to \mathbb{R}$ telle que $\omega_0(x) = \omega_0(f, x)$ est discontinue en x_0. De plus, en suivant le même raisonnement que dans la preuve du lemme 3.3.1, on peut vérifier facilement que ω_0 est semi-continue supérieurement. Ainsi, en vertu du lemme 3.3.3, $D_i(f)$ fait partie d'un ensemble de première catégorie. □

Il est également possible de généraliser l'autre résultat, mais étant donné qu'il fait intervenir le concept de dénombrabilité, nous avons dû ajouter des restrictions supplémentaires à l'espace de départ X. Avant de démontrer ce théorème, présentons un résultat préliminaire que nous ne démontrerons pas, étant donné qu'on peut le prouver aisément en suivant le même raisonnement que dans la proposition 3.3.4.

Lemme 3.4.1. *Soient X un espace de Baire et Y un espace métrique. Pour toute fonction $f : X \to Y$, l'ensemble $\{x \in X \mid \lim_{x \to x_0} \omega_0(f, x) = \omega_0(f, x_0) > 0\}$ est vide ou bien de deuxième catégorie.*

Voici finalement le théorème.

Théorème 3.4.2. *Soient X un espace de Baire satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité et Y un espace métrique. Pour toute fonction $f : X \to Y$,* *l'ensemble $D_\alpha(f)$ des discontinuités réductibles d'ordre α est au plus dénombrable si $\alpha > 1$.*

DÉMONSTRATION. Si $x_0 \in D_\alpha(f)$ pour $\alpha \geq 2$, alors $\omega_0^\alpha(f, x_0) = 0$ et ceci implique au sens de la définition 3.2.2 que $\lim_{x \to x_0} \omega_0^{\alpha-1}(f, x)$ existe. On peut supposer sans problème que $\omega(\omega_0^{\alpha-1}(f, x_0)) = 0$ car sinon, la fonction $\omega_0^{\alpha-1} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega_0^{\alpha-1}(x) = \omega_0^{\alpha-1}(f, x)$ ne serait pas continue en x_0. Elle serait donc une discontinuité déplaçable et en vertu du corollaire 3.2.1, cette situation se présente seulement un nombre au plus dénombrable de fois. Lorsque $\omega(\omega_0^{\alpha-1}(f, x_0)) = 0$, il en résulte que $\lim_{x \to x_0} \omega_0^{\alpha-1}(f, x) = \omega_0^{\alpha-1}(f, x_0) > 0$ et en vertu du lemme 3.4.1, x_0 fait partie d'un ensemble vide ou de deuxième catégorie. Puisque $\omega_0^{\alpha-1}(f, x_0) = \omega_0(\omega_0^{\alpha-2}(f, x_0)) > 0$, il en résulte que $\omega(\omega_0^{\alpha-2}(f, x_0)) > 0$. La fonction $\omega_0^{\alpha-2} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega_0^{\alpha-2}(x) = \omega_0^{\alpha-2}(f, x)$ n'est pas continue en x_0 et étant donné que $\alpha \geq 2$, elle est assurément la fonction oscillation, au sens de la définition (****), d'une certaine fonction arbitraire. Ainsi, en vertu du lemme 3.3.3, la fonction $\omega_0^{\alpha-2} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a un ensemble de discontinuités de première catégorie. Ainsi, x_0 fait partie d'un ensemble vide si $\omega(\omega_0^{\alpha-1}(f, x_0)) = 0$ et donc, $D_\alpha(f)$ est au plus dénombrable. $\square$

Remarquons que si nous avions défini l'oscillation d'ordre α comme étant $\omega^\alpha(f, x_0) = \omega(\omega^{\alpha-1}(f, x_0))$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et adapter la définition de «discontinuités réductibles d'ordre α» en conséquence, nous aurions pu démontrer aisément que l'ensemble des discontinuités réductibles d'ordre α de f est vide si $\alpha > 1$.

Chapitre 4

DES PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX FONCTIONS CONTINUES À LA DARBOUX

Avant d'aborder l'étude des propriétés relatives à cette classe de fonction, démontrons une proposition qui sera souvent utilisée implicitement dans les démonstrations de ce chapitre et qui servira de base à notre discussion sur la généralisation des propriétés dans un cadre plus général.

Proposition 4.0.1. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- *1) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue à la Darboux*
- *2) f transforme tout ensemble connexe en ensemble connexe*
- *3) f transforme tout ensemble connexe fermé en ensemble connexe*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). S'il existe un intervalle connexe $< a, b >$ où $a < b$ tel que $f(< a, b >)$ n'est pas connexe, alors $\exists c, d \in < a, b >$ tel que $f(c) < y < f(d)$ et tel que $y \notin f(< a, b >)$. Ainsi, f n'est pas continue à la Darboux.

2) $\Rightarrow$ 3) Ceci est immédiat.

3) $\Rightarrow$ 1). Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ où $a < b$ et soit y, un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$. Puisque $f([a, b])$ est connexe, alors $y \in f([a, b])$ et donc, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. Ainsi, f est continue à la Darboux. $\square$

4.1. LE THÉORÈME DE LINDENBAUM-SIERPINSKI

Dans cette section, nous présentons une des propriétés les plus surprenantes pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arbitraire.

Théorème 4.1.1. *(Lindenbaum-Sierpinski) Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme de deux fonctions continues à la Darboux.*

Ce théorème fut d'abord énoncé par A. Lindenbaum en 1927 [Lm] et ce n'est qu'en 1953 qu'une première démonstration de cette propriété fut donnée par Sierpinski [S-3]. Pour cette raison, on attribua la paternité de ce résultat à ces deux mathématiciens polonais. Cependant, plusieurs autres démonstrations originales vinrent s'ajouter dans les années subséquentes dont celles de Fast [Fa] en 1959, de Marcus [M-2] en 1960 et plus récemment, celle de Schlomiuk [Sch] en 1993 qui est sans aucun doute la plus simple. Dans la section suivante, nous présenterons chacune des trois démonstrations relatives à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui amènent, chacune à leur façon, des raisonnements différents et originaux. La preuve de Marcus s'applique quant à elle à un cadre plus général que les réels et nous la présenterons seulement dans la section suivante.

4.1.1. La preuve de Sierpinski

Démonstration. L'intervalle ouvert (0,1) et la droite réelle étant de même cardinalité, il existe une bijection $\phi : (0,1) \to \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ pouvant être écrit sous la forme $[x] + \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n(x)/2^n$ où $a_i(x) = \{0,1\}$ (on a converti la partie décimale de x sous forme dyadique). Posons $g(x) := \lim_{n\to\infty}(\Sigma_{k=1}^{n} a_{2k}(x))/n$. Définissons une fonction $h : \mathbb{R} \to (0,1)$ telle que :

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 0<g(x)<1, \\ 1/2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque. Définissons $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f_1(x) = \begin{cases} \phi(h(x)) & \text{si } \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}(x) = 0, \\ f(x) - \phi(h(x)) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - \phi(h(x)) & \text{si } \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}(x) = 0, \\ \phi(h(x)) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Ainsi, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et il reste à démontrer que f_1 et f_2 sont continues à la Darboux. Il suffira de démontrer que pour un intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$ non vide, $f_1((a,b)) = f_2((a,b)) = \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \subset \mathbb{R}$. D'après la définition de ϕ, $\exists t \in (0,1)$ tel que $\phi(t) = y$. Puisque $a < b$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $a + 1/2^{m-2} < b$. Ainsi, il existe un développement dyadique fini $\Sigma_{n=1}^{m} c_n/2^n$ tel que :

$$a < [a] + \Sigma_{n=1}^{m} \frac{c_n}{2^n} < [a] + \Sigma_{n=1}^{m} \frac{c_n}{2^n} + \frac{1}{2^{m+1}} < b$$

Posons $x = [a] + \Sigma_{n=1}^{m} c_n/2^n + \Sigma_{k=1}^{\infty}([kt] - [(k-1)t])/2^{2(m+k)}$. Puisque $0 \leq ([kt] - [(k-1)t]) \leq 1$, alors $a < x < b$. Remarquons que $g(x) = \lim_{n\to\infty}[nt]/n = \lim_{k\to\infty}[10^k t]/10^k = \lim_{k\to\infty} 0, d_1 d_2 \ldots d_k = t$ où $t = 0, d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots$ en développement décimal. En vertu de la définition de h, $h(x) = g(x) = t$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}(x) = 0$, alors $f_1(x) = \phi(h(x)) = \phi(t) = y$. Ainsi, $\exists x \in (a,b)$ tel que $f_1(x) = y$.

Soit maintenant $x' = [a] + \Sigma_{n=1}^{m} c_n/2^n + \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/2^{2(m+k)-1} + \Sigma_{k=1}^{\infty}([kt] - [(k-1)t])/2^{2(m+k)}$. Par conséquent, $a < x' < b$ et $g(x') = \lim_{n\to\infty}[nt]/n = t$. En vertu de la définition de h, $h(x) = g(x) = t$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}(x) = 1 \neq 0$, alors $f_2(x) = \phi(h(x)) = \phi(t) = y$. Ainsi, $\exists x' \in (a,b)$ tel que $f_2(x') = y$. Il en résulte que f_1 et f_2 sont continues à la Darboux. □

4.1.2. La preuve de Fast

Cette démonstration, tout comme celle de Sierpinski, fait appel au développement dyadique de la partie décimale des nombres réels comme stratégie permettant d'établir des fonctions continues à la Darboux. Cependant, le procédé de construction est totalement différent de celui de Sierpinski, puisqu'il utilise, entre autre, une fonction à deux variables réelles.

DÉMONSTRATION. Considérons une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ arbitraire. Montrons tout d'abord que pour un certain $y \in \mathbb{R}$ fixé, il existe une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

telle que la fonction $l_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $l_y(x) = F(x,y) + u(x)$ est continue à la Darboux.

Disons en premier lieu qu'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est de genre α s'il peut s'écrire de la forme :

$$x = [x] + a_0a_1...a_k0\overbrace{1...1}^{m}0\overbrace{1...1}^{n}0\overbrace{1...1}^{p}0\overbrace{1...1}^{q}0b_10b_20...0b_n0b_{n+1}0... \quad (1)$$

où $\{a_i, b_i\} \in \{0,1\}$, $q \geq 2$, et $k, m, n, p \geq 0$. Ici, m, n, p, q sont des nombres entiers positifs représentant le nombre de « 1 » successifs aux endroits indiqués ci-haut.

À partir de cette caractérisation, définissons deux applications $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$g(x) = \begin{cases} m - n + \Sigma_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}/2^n & \text{si } x \text{ est de genre } \alpha, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$h(x) = \begin{cases} p - q + \Sigma_{n=1}^{\infty} b_{2n}/2^n & \text{si } x \text{ est de genre } \alpha, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Ces applications sont bien définies étant donné que le développement (1) détermine de manière unique la suite $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et les nombres m, n, p et q. Définissons maintenant la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) := h(x) - F(x, g(x))$. Ainsi, pour un $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on a que $u(x) + F(x,y) = h(x)$ si $x \in g^{-1}(y)$. Soient $z \in \mathbb{R}$, et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ où $x_1 < x_2$. On veut montrer qu'il existe un $x' \in (x_1, x_2)$ tel que $F(x', y) + u(x') = z$. Il suffira de montrer qu'il existe un $x' \in (x_1, x_2) \bigcap g^{-1}(y)$ tel que $F(x', g(x')) + u(x') = h(x') = z$.

Soient $y, z \in \mathbb{R}$ écrits sous la forme :

$$y = [y] + \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}}{2^n},\, z = [z] + \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{2^n} \quad (2)$$

où $b_i \in \{0,1\}$. Soient maintenant a' et $a'' \in (x_1 + r, x_2 + r) \bigcap (0,1)$, où r est un entier convenable , écrits avec développement dyadique sous la forme :

$$a' = \Sigma_{n=0}^{k} \frac{a_n}{2^{n+1}}, a'' = \Sigma_{n=0}^{k} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (3)$$

.

Désignons par m, n, p et q des entiers positifs pour lesquels

$$[y] = m - n, [z] = p - q \quad (4)$$

.

Désignons par $x_0 \in (0,1)$, un nombre de la forme (1) situé entre a' et a'' et satisfaisant à (2),(3) et (4). Il en résulte que $x_0 \in (x_1 + r, x_2 + r)$ et que si $x' = x_0 - r \in (x_1, x_2)$, alors $g(x') = y$ et $h(x') = z$. Ainsi, $\exists x' \in (x_1, x_2) \bigcap g^{-1}(y)$ tel que $F(x', g(x')) + u(x') = h(x') = z$. Ceci implique que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\exists u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $l_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue à la Darboux.

$$\text{Posons } F(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Ainsi, $l_0 = u$ est continue à la Darboux et a fortiori, $-u$ l'est également. De plus, pour $y_0 \neq 0$, $l_{y_0} = f + u$ est continue à la Darboux. Ainsi, $f = (f+u) + (-u)$ est la somme de deux fonctions continues à la Darboux. □

4.1.3. La preuve de Schlomiuk

DÉMONSTRATION. Soient $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ deux groupes additifs. Soit $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{x + \mathbb{Q} | x \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des translatés de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ étant de même cardinalité, il existe une bijection $\phi \ : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Ainsi, l'application $g \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $g(x) = \phi(x + \mathbb{Q})$ est bien définie.

Soient A et B, deux parties denses de $\mathbb{R}$ telles que :

- i) $A \bigcup B = \mathbb{Q}$
- ii) $A \bigcap B = \emptyset$

Choisissons un représentant t pour chaque translaté de $\mathbb{Q}$ et appelons F, l'ensemble des représentants choisis.

Soient

$$A' := \{x \in \mathbb{R} | \exists t \in F \text{ tel que } (x-t) \in A\}$$

$$B' := \{x \in \mathbb{R} | \exists t \in F \text{ tel que } (x-t) \in B\}$$

Ainsi, $A' \bigcup B' = \mathbb{R}$ et $A' \bigcap B' = \emptyset$. Définissons $f_1 \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A', \\ f(x) - g(x) & \text{si } x \in B' \end{cases} \tag{4.1.7}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si } x \in A', \\ g(x) & \text{si } x \in B' \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ où $a < b$. Montrons que $f_1((a,b)) = f_1((a,b) \bigcap A') = \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Par définition de ϕ, $\exists t \in F$ tel que $\phi(t + \mathbb{Q}) = y$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un $x \in (a,b) \bigcap A'$ tel que $f_1(x) = g(x) = \phi(x + \mathbb{Q}) = \phi(t + \mathbb{Q})$. Ceci est possible étant donné qu'il existe un $x \in (a,b)$ tel que $x - t \in A$ car sinon on aurait que $(a-t, b-t) \bigcap A = \emptyset$, ce qui est absurde en vertu de la densité de A. Il s'en suit que f_1 est continue à la Darboux. On pourrait également montrer que f_2 est continue à la Darboux en utilisant le même raisonnement. Puisque $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, le théorème est démontré. $\square$

Mentionnons qu'il est possible de démontrer en corollaire de ce théorème que la cardinalité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à la Darboux est la même que celle des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconques. C'est pour cette raison que l'ensemble des fonctions continues à la Darboux est si riche.

4.2. Continuité à la Darboux dans un cadre plus général et contributions de Marcus

La définition de fonction continue à la Darboux dans un cadre plus général fut présentée par plusieurs comme étant une fonction transformant tout ensemble connexe fermé en connexe. Si l'on se réfère à la proposition 4.0.1, cette généralisation a du sens. Cependant, pourquoi n'a-t-on pas défini une fonction continue à la Darboux de façon plus générale en affirmant que c'est une fonction transformant tout ensemble connexe en ensemble connexe? Une des raisons pourrait être que pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ où $n \geq 2$, les énoncés 2 et 3 de la proposition 4.0.1 ne sont plus équivalents. D'abord, dans le cadre de sa généralisation du théorème de Lindenbaum-Sierpinski, Marcus a démontré que toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la somme de deux fonctions transformant tout ensemble connexe fermé en ensemble connexe. En revanche, Sierpinski a trouvé un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui ne peut pas s'exprimer comme la somme deux fonctions transformant tout ensemble connexe en ensemble connexe. Voici son contre-exemple se trouvant également dans $[S-3]$.

Exemple 4.2.1. *Considérons les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{Q}^c$ qui sont non dénombrables. Par conséquent, il existe une bijection $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Q}^c$ et on va prendre comme exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \phi(x)$. Supposons qu'il existe deux fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ transformant tout ensemble connexe en connexe et telles que $f = g + h$. Soit $M \subset \mathbb{R}^2$, un ensemble connexe contenant plus d'un point. Dans ce cas, M est non dénombrable et $f(M) = N \subset \mathbb{R}$ est aussi non dénombrable étant donné que f est injective.*

Remarquons que g n'est pas constante sur M, car si elle l'était, on aurait que $g(M) = a$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Il en résulterait que $h(M) = f(M) - a$ n'est pas connexe par définition de f. Ainsi, $g(M) \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et il contient des rationnels.

Soit maintenant $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 | g(x) \in \mathbb{Q}\}$. Cet ensemble ne contient aucune composante connexe à plus d'un point, car s'il existait une telle composante $M \subset Q$, alors $g(M)$ serait un intervalle et il contiendrait des irrationnels. Ceci est évidemment impossible en vertu de la définition de Q. Il en résulte que l'ensemble $H = \mathbb{R}^2 - Q$ est connexe et donc, $g(H)$ est connexe. Remarquons que H doit contenir plus d'un point, car sinon on aurait que $g(H) = a$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}^2) = g(H) + g(Q) \subset a + \mathbb{Q}$ ne serait pas connexe. Ainsi, $g(H)$ doit être un intervalle et contenir des rationnels. Ceci est absurde en vertu de la définition de Q. Ainsi, f qui ne peut pas s'exprimer comme la somme deux fonctions transformant tout ensemble connexe en ensemble connexe.

Étant donné qu'il y a une différence entre les énoncés 2 et 3 de la proposition 4.0.1 dans un cadre plus large, nous conviendrons de définir deux nouvelles classes de fonctions pour la suite de ce chapitre. Nous dirons qu'une fonction est de classe $\mathcal{D}$ si elle transforme tout ensemble connexe fermé en ensemble connexe et qu'elle est de classe $\mathcal{D}^*$ si elle transforme tout ensemble connexe en ensemble connexe.

Nous présentons maintenant la preuve de Marcus pour le théorème de Lindenbaum-Sierpinski. Cette preuve fut donnée pour un cas beaucoup plus général que les fonctions de classe $\mathcal{D}$ et elle fait intervenir des notions de la théorie des ensembles plutôt que des notion relatives à des espaces topologiques comme on devrait normalement s'y en attendre lorsqu'on traite des fonctions. À partir de sa démonstration, nous pourrons, avec un corollaire et des résultats préliminaires, déduire que toute fonction $f \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{D}$. Présentons au préalable un lemme introduit par Marcus pour démontrer son théorème. Ce lemme nous servira également dans la démonstration des autres propriétés relatives aux fonctions de classe $\mathcal{D}$. Pour ce lemme et les autres théorèmes de cette section, considérons $\mathcal{A}$ comme un nombre cardinal transfini quelconque et $\phi_{\mathcal{A}}$ comme l'ordinal initial associé au cardinal $\mathcal{A}$.

Lemme 4.2.1. *Soit λ, un nombre cardinal inférieur ou égal à $\aleph_0$. Soient X un ensemble de cardinalité $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une famille quelconque de cardinalité $\mathcal{A}$ formée de sous-ensembles de X ayant une cardinalité $\mathcal{A}$. Alors, il existe λ sous-ensembles $B^1, B^2, ..., B^\lambda$ et $\mathcal{A}$ sous-ensembles B^i_γ $(1 \leq i \leq \lambda$ et $1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}})$ de X tels que :*

- *i)* $\bigcup_{1 \leq i \leq \lambda} B^i = X$
- *ii)* $B^i = \bigcup_{1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}} B^i_\gamma$ *pour* $i \in \{1, 2, ..., \lambda\}$
- *iii) Chacun des B^i_γ intersecte chaque ensemble de la famille $\mathcal{F}$*
- *iv)* $B^i_\gamma \cap B^j_\beta = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *ou* $\gamma \neq \beta$.

DÉMONSTRATION. En vertu de l'axiome du choix, il est possible de bien ordonner tous les éléments de X avec l'ordinal $\phi_{\mathcal{A}}$ et on a donc la suite transfinie :

$$u_1, u_2, ..., u_\alpha, ...(\alpha < \phi_{\mathcal{A}}) \quad (1)$$

Puisque $\mathcal{A} \bullet \mathcal{A} = \mathcal{A}$, il est possible de former une suite transfinie de type $\phi_{\mathcal{A}}$ dans laquelle chaque élément de $\mathcal{F}$ apparaît $\mathcal{A}$ fois. On obtient ainsi une suite de la forme suivante :

$$E_1, E_2, ..., E_\alpha, ...(\alpha < \phi_{\mathcal{A}}) \quad (2)$$

Choisissons maintenant, par induction transfinie, des éléments de X selon un procédé bien précis. Pour chaque α, définissons $P(\alpha)$ comme étant l'étape d'induction où l'on choisit le premier terme de la suite (1) contenu dans E_α et qui n'a pas été choisi dans les étapes précédentes d'induction. Ce choix est toujours possible étant donné qu'à l'étape α ($\alpha < \phi_{\mathcal{A}}$), on a choisi moins de $\mathcal{A}$ éléments et on sait que la suite (1) contient $\mathcal{A}$ éléments. En réécrivant maintenant les éléments de $\mathcal{F}$ dans une suite transfinie de type $\phi_{\mathcal{A}}$ où chaque élément apparaît seulement une fois, on a une suite de la forme :

$$F_1, F_2, ..., F_\alpha, ...(\alpha < \phi_{\mathcal{A}}) \quad (3)$$

Puisque chacun des F_α est répété $\mathcal{A}$ fois dans la suite (2), il en résulte que par le processus d'induction appliqué ci-haut, on a choisi $\mathcal{A}$ éléments dans chacun des F_α. Désignons par u_α^γ l'élément choisi de F_α à l'étape γ de la sélection des éléments de ce F_α. Posons alors $A_\gamma = \{u_\alpha^\gamma\}_{1 \leq \alpha < \phi_{\mathcal{A}}}$ pour $\gamma > 2$ et $A_1 = X - \bigcup_{2 \leq \gamma < \mathcal{A}} A_\gamma$. Puisqu'il y a $\mathcal{A}$ ensembles de type A_γ ($1 \leq \alpha < \phi_{\mathcal{A}}$) et que $\lambda \bullet \mathcal{A} = \mathcal{A}$, alors on peut ranger ces ensembles A_γ dans λ suites transfinies de type $\phi_{\mathcal{A}}$:

$$B_1^i, B_2^i, ..., B_\gamma^i, ...(\gamma < \phi_{\mathcal{A}}), i = 1, 2, ..., \lambda$$

Ainsi, par construction des A_α, chacun des B_γ^i recontre chacun des ensembles de $\mathcal{F}$ et ils sont disjoints deux à deux. Les B_γ^i satisfont donc bien aux conditions i) à iv) du lemme. □

Voici finalement le théorème très général de Marcus.

Théorème 4.2.1. *(Marcus) Toute fonction $f : X \to Y$, où X et Y sont des ensembles de cardinalité $\mathcal{A}$, est la somme de deux fonctions transformant tout ensemble de cardinalité $\mathcal{A}$ d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X de cardinalité $\mathcal{A}$ en l'ensemble Y.*

DÉMONSTRATION. Il est possible de bien ordonner les éléments de Y avec l'ordinal $\phi_{\mathcal{A}}$ et on a donc la suite transfinie :

$$y_1, y_2, ..., y_\alpha, ...(\alpha < \phi_{\mathcal{A}})$$

En vertu du lemme précédent, il existe (avec $\lambda = 2$) deux ensembles B^1 et B^2 satisfaisant aux conditions i) à iv) de ce résultat. Définissons $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : X \to Y$ telles que :

$$f_1(x) = \begin{cases} y_\gamma & \text{si } x \in B^1_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}), \\ f(x) - y_\gamma & \text{si } x \in B^2_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - y_\gamma & \text{si } x \in B^1_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}), \\ y_\gamma & \text{si } x \in B^2_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Ainsi, $f = f_1 + f_2$ et il faut montrer que pour un ensemble $E \in \mathcal{F}$, $f_1(E) = f_2(E) = Y$. Il suffit de montrer que pour un $y \in Y$, $\exists x_i \in E$ tel que $f_i(x_i) = y$ pour $i = 1, 2$. Pour $y \in Y$, $\exists \gamma < \phi_{\mathcal{A}}$ tel que $y = y_\gamma$ et selon la condition ii) du lemme, $B^i_\gamma \cap E \neq \emptyset$. Ainsi, $\exists x_i \in B^i_\gamma \cap E$ et par définition des f_i, $f_i(x_i) = y_\gamma$ pour $i = 1, 2$. □

Avant d'établir le cas plus général du théorème de Lindenbaum-Sierpinski pour des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, nous devons démontrer une proposition à l'aide du lemme de Urysohn.

Lemme 4.2.2. *(Urysohn) Soit X un espace normal. Soient A et B deux ensembles fermés disjoints de X et soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Alors, il existe une fonction continue $f : X \to [a, b]$ telle que $f(x)=a$, $\forall x \in A$ et telle que $f(x)=b$, $\forall x \in B$.*

Proposition 4.2.1. *La famille $\mathcal{F}$ des ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est de cardinalité du continu.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}_x$, la famille des ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas le point x. Puisque $\mathcal{F} \subset \{\mathbb{R}^n\} \cup \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_x$ est de cardinalité c pour un $x \in \mathbb{R}^n$. D'abord, il est clair que la cardinalité de $\mathcal{F}_x$ est au moins égale à c. Supposons que $card(\mathcal{F}_x) > c$. Dans ce cas, chaque ensemble de $\mathcal{F}_x$ est disjoint de l'ensemble fermé $\{x\}$ et donc, en vertu du lemme de Urysohn, $card(\mathcal{F}_x) = card(C(\mathbb{R}^n, [0,1])$ où $C(\mathbb{R}^n, [0,1])$ représente l'ensemble des fonctions continues allant de $\mathbb{R}^n$ vers l'intervalle $[0,1]$. Ceci est une contradiction étant donné que $card(C(\mathbb{R}^n, [0,1])) = c$. □

Voici l'extension du théorème de Lindenbaum-Sierpinski pour des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Corollaire 4.2.1. *Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{D}$*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 4.2.1, la famille $\mathcal{F}$ des ensembles connexes fermés de $\mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point est de cardinalité c. Puisque $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ et chaque ensemble de $\mathcal{F}$ sont également de cardinalité c, en vertu du théorème précédent, f peut s'écrire comme la somme de deux fonctions f_1 et f_2 telles que pour tout ensemble connexe fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point, on a $f_1(E) = f_2(E) = \mathbb{R}^m$. Ainsi, f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{D}$. □

Remarquons que pour $n \geq 2$, la cardinalité des ensembles connexes quelconques de $\mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point est égale à 2^c. C'est pour cette raison que le théorème de Marcus ne s'applique pas pour les fonctions de classe $\mathcal{D}^*$ et que le contre-exemple de Sierpinski a du sens. Mentionnons également que Sierpinski avait démontré dans [S-3] que toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où X est un espace métrique connexe et séparable, est la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{D}$. Il est possible d'obtenir ce résultat à partir du théorème de Marcus.

Attardons-nous maintenant aux autres propriétés des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ arbitraires relatives aux fonctions de classe $\mathcal{D}$. Voici d'abord un autre résultat très général de Marcus qui nous permettra d'établir le cas particulier recherché pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.2. *Soient X un ensemble de cardinalité $\mathcal{A}$, Y un corps de cardinalité $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ une famille de cardinalité $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X de cardinalité*

$\mathcal{A}$. *Toute fonction* $f : X \to Y$ *est le produit de deux fonctions* f_1 *et* f_2 *telles que* $\forall E \in \mathcal{F}$*,* $f_1(E) \supset (Y - \{0\})$ *et* $f_2(E) \supset (Y - \{0\})$

Démonstration. Il est possible de bien ordonner les éléments de Y différents de 0 avec l'ordinal $\phi_{\mathcal{A}}$ et on a donc la suite transfinie :

$$y_1, y_2, ..., y_\alpha, ...(\alpha < \phi_{\mathcal{A}})$$

En vertu du lemme 4.2.1, il existe (avec $\lambda = 2$) deux ensembles B^1 et B^2 satisfaisant aux conditions i) à iv) de ce résultat. Définissons $f_1 : X \to Y$ et $f_2 : X \to Y$ telles que :

$$f_1(x) = \begin{cases} y_\gamma & \text{si } x \in B^1_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}), \\ \frac{f(x)}{y_\gamma} & \text{si } x \in B^2_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}) \end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{y_\gamma} & \text{si } x \in B^1_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}), \\ y_\gamma & \text{si } x \in B^2_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}) \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Ainsi, $f = f_1 \bullet f_2$ et en utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 4.2.1, on verrait sans peine que $\forall E \in \mathcal{F}$, $f_1(E) \supset (Y - \{0\})$ et $f_2(E) \supset (Y - \{0\})$. □

Corollaire 4.2.2. *Pour toute fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, la fonction* $|f|$ *peut-être exprimée comme le produit de deux fonctions de classe* $\mathcal{D}$.

Démonstration. En vertu de la proposition 4.2.1, la famille $\mathcal{F}$ des ensembles connexes fermés de $\mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point est de cardinalité c. Puisque $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^+$ et chaque ensemble de $\mathcal{F}$ sont également de cardinalité c, alors en vertu du théorème précédent, $|f|$ peut s'écrire comme le produit de deux fonctions $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ et $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout ensemble connexe fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point, on a $f_i(E) = (0, \infty)$ ou $[0, \infty)$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{D}$. □

Il est facile d'obtenir une démonstration directe du dernier corollaire pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en apportant de légères modifications à la preuve de

Schlomiuk du théorème de Lindenbaum-Sierpinski. Par contre, il est impossible de représenter toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{D}$, étant donné que Marcus a lui-même donné l'exemple dans [M-3] d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne peut pas s'exprimer comme le produit de deux fonctions continues à la Darboux. Voici un dernier théorème présenté dans [M-2] qui nous permettra d'obtenir une autre propriété pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ quelconque.

Théorème 4.2.3. *Toute fonction $f : X \to Y$ où X et Y sont des ensembles de cardinalité $\mathcal{A}$ est la limite ponctuelle d'une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ transformant tout ensemble de cardinalité $\mathcal{A}$ d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X de cardinalité $\mathcal{A}$ en l'ensemble Y.*

Démonstration. Comme auparavant, il est possible de bien ordonner les éléments de Y avec l'ordinal $\phi_{\mathcal{A}}$ et on a donc la suite transfinie :

$$y_1, y_2, ..., y_\alpha, ...(\alpha < \phi_{\mathcal{A}})$$

En vertu du lemme 4.2.1, il existe (avec $\lambda = \aleph_0$) des ensembles $\{B^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant aux conditions i) à iv) de ce résultat. Définissons les fonctions $f_n : X \to Y$ telles que :

$$f_n(x) = \begin{cases} y_\gamma & \text{si } x \in B^n_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}), \\ f(x) & \text{si } x \notin B^n_\gamma \ (1 \leq \gamma < \phi_{\mathcal{A}}) \end{cases} \tag{4.2.5}$$

On a que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers f. En effet, pour un $x \in X$, selon la condition i) du lemme 4.2.1, $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B^i$. Puisque les B^i sont disjoints deux à deux, il en résulte que $x \notin B^n$ et donc que $f_n(x) = f(x)$, $\forall n > i$.

Il reste à montrer que pour un ensemble $E \in \mathcal{F}$, $f_n(E) = Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que pour un $y \in Y$, $\exists x_i \in E$ tel que $f_i(x_i) = y$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Pour $y \in Y$, $\exists \gamma < \phi_{\mathcal{A}}$ tel que $y = y_\gamma$ et selon la condition ii) du lemme, $B^i_\gamma \cap E \neq \emptyset$. Ainsi, $\exists x_i \in B^i_\gamma \cap E$ et par définition des f_i, $f_i(x_i) = y_\gamma$ $\forall i \in \mathbb{N}$. $\square$

Corollaire 4.2.3. *Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est la limite ponctuelle d'une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{D}$.*

Démonstration. En vertu de la proposition 4.2.1, la famille $\mathcal{F}$ des ensembles connexes fermés de $\mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point est de cardinalité c. Puisque $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ et chaque ensemble de $\mathcal{F}$ sont également de cardinalité c, alors en vertu du théorème précédent, f peut s'écrire comme la limite ponctuelle d'une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout ensemble connexe fermé $E \subset \mathbb{R}^n$ contenant plus d'un point, on a $f_n(E) = \mathbb{R}^m$. Ainsi, f_n est de classe $\mathcal{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Pour le cas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ce dernier résultat avait été démontré directement par Fast [Fa] et par Schlomiuk [Sch] dans une preuve très simple.

4.3. Continuité à la Darboux au sens de Neugebauer et généralisation d'un théorème de Marcus

À la section précédente, nous avons discuté des façons possibles d'étendre la notion de continuité à la Darboux pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ce qui nous avait amené à définir les fonctions de classe $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$. Cependant, Neugebauer a cherché, dans un article publié en 1963 [N], à étendre cette notion d'une façon différente. Il voulait que ces fonctions transforment une certaine classe d'ensembles connexes de $\mathbb{R}^n$ en ensembles connexes de $\mathbb{R}^m$ de façon à ce qu'elles respectent certaines caractéristiques de la classe des fonctions continues à la Darboux pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En effet, il voulait que les fonctions approximativement continues, que les dérivées de certaines fonctions d'intervalles et que les dérivées partielles approximatives ou ordinaires des fonctions continues et linéaires fassent partie de sa classe de fonctions «continues à la Darboux» pour le cas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Il a donc défini une classe de connexes de $\mathbb{R}^n$ suffisamment large pour être équivalente aux connexes quelconques si $n = 1$ et suffisamment restreinte pour que sa nouvelle classe de fonctions «continues à la Darboux» respecte les conditions énumérées plus haut. Il a nommé les ensembles de cette nouvelle classe de connexes «ensembles de Darboux». Avant d'en présenter la définition, nous conviendrons d'appeler un intervalle $I \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble de la forme $\times_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ où $a_i \neq b_i$, $\forall i$.

Définition 4.3.1. *Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ sera appelé un ensemble de Darboux $\Leftrightarrow$*

- *1) $\forall x \in D$, il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}^n$ tel que $x \in I$ et $int(I) \subset D$.*
- *2) $\forall x, y \in D$, il existe des ensembles $Q_1, Q_2, ..., Q_j$ tels que $Q_i \subset D$ $\forall i \in \{1, 2, ..., j\}$, $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$ $\forall i \in \{1, 2, ..., j-1\}$, $\overline{Q_i}$ est un intervalle et $int(Q_i) \subset Q_i \subset \overline{Q_i}$. De plus, il faut que $x \in Q_1$ et que $y \in Q_j$.*

À partir de cette définition, on dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue à la Darboux au sens de Neugebauer si et seulement si pour tout ensemble de Darboux $D \subset \mathbb{R}^n$, $f(D)$ est un ensemble connexe de $\mathbb{R}^m$. Dans les lignes qui suivent, nous généraliserons pour le cas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un théorème démontré par Marcus dans [M-3] stipulant que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est égale à une fonction continue à la Darboux sauf sur un ensemble de mesure nulle et de première catégorie. Avant d'arriver à ce résultat, rappelons certaines notions relatives à l'ensemble triadique de Cantor dont nous nous servirons.

Soit $\mathcal{C}[0,1] := \{x \in [0,1] | x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,2\}\}$.

Cet ensemble est communément appelé l'ensemble triadique de Cantor et remarquons que lorsque deux développements triadiques sont possibles, on utilise celui contenant une infinité de 2 :

$$\frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + ...$$

.

Par construction de l'ensemble, on voit facilement que $\mathcal{C}[0,1]$ contient $2^{\aleph_0}$ éléments et qu'il est donc non dénombrable. De plus, on remarque que l'ensemble $[0,1] \cap \mathcal{C}[0,1]^c$ est en fait équivalent à l'ensemble suivant :

$$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) + (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) + (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) + (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) + ...$$

Ainsi,

$$m([0,1] \cap (\mathcal{C}[0,1])^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = 1$$

et la mesure de l'ensemble de Cantor est nulle. Par surcroît, l'ensemble $[0,1] \cap (\mathcal{C}[0,1]^c)$ est par construction ouvert et partout dense dans $[0,1]$. Il en résulte que $\mathcal{C}[0,1]$ est non dense.

Considérons maintenant l'ensemble :

$$\mathcal{C}[a,b] \ := \{y \in [a,b] | y = (b-a)x + a, x \in \mathcal{C}[0,1]\}$$

.

Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble de Cantor et il est donc non dénombrable. De plus, en suivant le même raisonnement que ci-haut, on pourrait facilement se convaincre qu'il est également de mesure nulle et non dense.

Soient $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\times_{i=1}^{n} \mathcal{C}[k_i, k_i+c]$, un « ensemble de Cantor à n dimensions » créé dans un hypercube à n dimensions de côté c. Nous aurons besoin de ce type d'ensemble et d'en saisir les caractéristiques principales pour la démonstration de notre résultat. Le lemme suivant présente ces caractéristiques.

Lemme 4.3.1. *Soient $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$. L'ensemble $A = \times_{i=1}^{n} \mathcal{C}[k_i, k_i + c]$ est fermé, de mesure nulle, non dénombrable et non dense.*

DÉMONSTRATION. La non dénombrabilité et la nullité de la mesure de $\mathcal{C}[k_1, k_1+c]$ entraînent immédiatement que A est également non dénombrable et de mesure nulle. Considérons maintenant une suite $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x. Chacun des x_m peut être exprimé comme $(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$ où $x_{mi} \in \mathcal{C}[k_i, k_i+c]$. Puisque $\mathcal{C}[k_i, k_i+c]$ est fermé pour $1 \leq i \leq n$, alors les suites $\{x_{mi}\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers un certain $x_i \in \mathcal{C}[k_i, k_i + c]$. Ainsi, $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ et donc, A est fermé. Finalement, remarquons que l'ensemble $\times_{i=1}^{n}[k_i, k_i+c] \cap A^c$ est partout dense dans $\times_{i=1}^{n}[k_i, k_i+c]$. En effet, soient $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \times_{i=1}^{n}[k_i, k_i + c]$ et $\delta > 0$. Puisque $[k_1, k_1 + c] \cap (\mathcal{C}[k_1, k_1 + c])^c$ est dense dans $[k_1, k_1+c]$, alors $\exists z_1 \in [k_1, k_1+c] \cap \mathcal{C}[k_1, k_1+c]^c$ tel que $|z_1 - y_1| < \delta$. Ainsi, $(z_1, y_2, ..., y_n) \in \times_{i=1}^{n}[k_i, k_i+c] \cap A^c$ et $(z_1, y_2, ..., y_n) \in B_\delta(y)$. Ceci démontre la densité de $\times_{i=1}^{n}[k_i, k_i + c] \cap A^c$ dans $\times_{i=1}^{n}[k_i, k_i + c]$ et la non densité de A, étant donné que c'est un ensemble fermé. $\square$

Voici maintenant la généralisation du théorème de Marcus.

Théorème 4.3.1. *Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est égale à une fonction g : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue à la Darboux au sens de Neugebauer sauf sur un ensemble de mesure nulle et de première catégorie.*

DÉMONSTRATION. Soit $P_{1(k_1,k_2,...,k_n)} = \times_{i=1}^n \mathcal{C}[k_i, k_i + 1]$. Considérons la famille d'ensembles $\mathcal{F}_1 = \{P_{1(k_1,k_2,...,k_n)} | k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{Z}\}$ qui est évidemment dénombrable. Ainsi, il est possible de réarranger les éléments de cette famille comme une suite d'ensembles de mesure nulle $\{P_{1,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Chacun des hypercubes de longueur 1 de $\mathbb{R}^n$ avec des sommets à coordonnées entières contient $3^n - 2^n$ hypercubes ouverts de longueur $1/3$ contigus à un certain $P_{1,m}$. Dans chacun de ces hypercubes de la forme $\times_{i=1}^n [j_i, j_i + 1/3]$, on construit des ensembles $\times_{i=1}^n \mathcal{C}[j_i, j_i + 1/3]$. Ces ensembles construits formeront une famille d'ensembles que l'on notera $\mathcal{F}_2$ qui est de cardinalité $(3^n - 2^n)\aleph_0$ et donc, dénombrable. Il est possible de réarranger les éléments de cette famille comme une suite d'ensembles de mesure nulle $\{P_{2,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Poursuivons le procédé inductivement et ainsi, à l'étape l, après avoir construit la famille d'ensembles $\mathcal{F}_l$ dans les hypercubes de longueur $1/3^{l-1}$ contigus à des $P_{l-1,m}$. Chacun des hypercubes de longueur $1/3^{l-1}$ contigus à un certain $P_{l-1,m}$ contient $3^n - 2^n$ hypercubes ouverts de longueur $1/3^l$ contigus à un certain $P_{l,m}$. Dans chacun de ces hypercubes de la forme $\times_{i=1}^n [j_i, j_i + 1/3^l]$, on construit des ensembles $\times_{i=1}^n \mathcal{C}[j_i, j_i + 1/3^l]$. Ces ensembles construits formeront une famille d'ensembles que l'on notera $\mathcal{F}_{l+1}$ qui est de cardinalité $(3^n - 2^n)\aleph_0$ et donc, dénombrable. Considérons la famille d'ensembles $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$. Cette famille sera dénombrable et nous pouvons réarranger les éléments de cette famille comme une suite d'ensembles $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ qui seront, par construction et en vertu du lemme précédent, non dénombrables, non denses et de mesure nulle.

Définissons inductivement une suite de fonctions bijectives $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dont nous nous servirons pour construire la fonction g recherchée. D'abord, puisque P_1 est non dénombrable, on peut créer une bijection $\phi_1 : P_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Ensuite, puisque P_2 est non dénombrable, il existe une bijection $\phi_2 : P_2 - P_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m - \phi_1(P_1 \cap P_2)$. En supposant que $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$, des applications bijectives, ont été définies, puisque P_{m+1} est non dénombrable, on peut créer une bijection

$$\phi_{m+1} \ : P_{m+1} - (\bigcup_{i=1}^{m} P_i) \to \mathbb{R}^m - (\bigcup_{i=1}^{m} \phi_i((P_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j) \cap P_{m+1})$$

Construisons $g \ : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$g(x) \ := \begin{cases} \phi_m(x) & \text{si } x \in P_m - (\bigcup_{i=1}^{m-1} P_i), \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Montrons que pour tout ensemble de Darboux $D \subset \mathbb{R}^n$, $g(D) = \mathbb{R}^m$. Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de Darboux, alors en vertu de la définition 4.3.1, il existe un intervalle I de $\mathbb{R}^n$ tel que $int(I) \subset D$. Par construction des ensembles P_m de $\mathcal{F}$, $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $P_j \subset int(I) \subset D$. On remarque que :

$$P_j = P_j \cap P_1 + P_j \cap (P_2 - P_1) + ... + P_j \cap (P_{j-1} - \bigcup_{i=1}^{j-2} P_i) + P_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} P_i$$

Par conséquent,

$$g(P_j) = \phi_1(P_j \cap P_1) + \phi_2(P_j \cap (P_2 - P_1)) + ... + \phi_{j-1}(P_j \cap (P_{j-1} - \bigcup_{i=1}^{j-2} P_i)) + \phi_j(P_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} P_i)$$

Par définition des applications $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, il en résulte que $g(P_j) = \mathbb{R}^m$ et que g est continue à la Darboux au sens de Neugebauer. Finalement, on remarque que $g(x) = f(x)$ sauf sur l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ qui est, en vertu du lemme précédent, de mesure nulle et de première catégorie. $\square$

Chapitre 5

APPROXIMATION DE FONCTIONS QUELCONQUES PAR D'AUTRES CLASSES DE FONCTIONS

5.1. Deux théorèmes présentés par Marcus

Dans un article publié en 1957, Marcus [M-1] présente deux résultats à la fois mystérieux et intéressants pour des fonctions quelconques. Le premier, démontré par Ruziewicz en 1935, stipule que toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ peut être exprimée comme la composée de deux fonctions mesurables. L'autre, déduit par Marcus dans son article, affirme que toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée peut être exprimée comme la composée de deux fonctions intégrables au sens de Riemann. Dans les lignes qui suivent, nous proposons de démontrer ces résultats en utilisant des arguments légèrement différents de ceux utilisés par Marcus. De plus, pour le premier résultat, nous étendons l'intervalle de départ $[0,1]$ à toute la droite réelle et pour le second, l'intervalle $[0,1]$ est remplacé par un intervalle $[a,b]$ quelconque. Avant de démontrer ces résultats, faisons quelques rappels de résultats d'analyse réelle.

Rappel 5.1.1. *Toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un ensemble de discontinuités au plus dénombrable.*

Rappel 5.1.2. *Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue presque partout est mesurable.*

Rappel 5.1.3. *(Critère de Lebesgue) Toute fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *bornée est intégrable au sens de Riemann* $\Leftrightarrow$ f *l'ensemble des discontinuités de* f *est de mesure nulle.*

Théorème 5.1.1. *Toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *peut être exprimée sous la forme* $f = g \circ h$ *où* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont mesurables.*

DÉMONSTRATION. Il est possible d'écrire $x \in \mathbb{R}$ sous la forme :

$$[x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}; a_i \in \{0,1\}$$

Définissons l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$h(x) = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}; \text{où } b_i = 0 \text{ si } a_i = 0\,;\, b_i = 2 \text{ si } a_i = 1$$

Cette fonction est injective et monotone croissante par définition. En vertu du rappel 5.1.1, les discontinuités de h forment un ensemble au plus dénombrable. Il en résulte, par le rappel 5.1.2, que h est mesurable. De plus, remarquons que $\forall z \in \mathbb{Z}$, $h([z, z+1]) = \mathcal{C}[0,1]+z$, i.e. c'est l'ensemble triadique de Cantor translaté de z unités. Cet ensemble est fermé, non dense en $\mathbb{R}$ et de mesure nulle. Ainsi, $h(\mathbb{R})$ est de mesure nulle.

Définissons maintenant l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$g(y) := \begin{cases} f(x) & \text{si } y = h(x), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Remarquons que si $g(y) = 0$, alors $\exists z \in \mathbb{Z}$ tel que $y \in [z, z+1] - (\mathcal{C}[0,1] + \{z\})$. Puisque $\mathcal{C}[0,1] + \{z\}$ est fermé, alors $\exists \delta > 0$ tel que $(y - \delta, y + \delta) \subset [z, z+1] - (\mathcal{C}[0,1] + \{z\})$. Ainsi, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall y' \in (y - \delta, y + \delta)$, $g(y') = 0$. Il en résulte que g est continue $\forall y$ où $g(y) = 0$ et que l'ensemble des discontinuités de g est de mesure nulle. Ainsi, en vertu du rappel 5.1.2, g est mesurable. Puisque h est bijective, alors $f = g \circ h$ et on obtient la conclusion cherchée. $\square$

Voici finalement le deuxième résultat dont la preuve suit le même raisonnement que la démonstration précédente.

Théorème 5.1.2. *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ peut être exprimée sous la forme $f = g \circ h$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration. Prenons tout d'abord la même application h que celle définie dans la preuve précédente en la restreignant à $[a,b]$. Ainsi, h est bornée sur $[a,b]$ et elle a un nombre de discontinuités au plus dénombrable. En vertu du critère de Lebesgue, h est intégrable au sens de Riemann $\forall x \in [a,b]$.

Prenons ensuite la même application g que celle définie dans la preuve précédente. Ainsi, l'ensemble des discontinuités de g sera de mesure nulle et cette fonction sera bornée étant donné que f est bornée par hypothèse. Par le critère de Lebesgue, g est intégrable au sens de Riemann $\forall x \in [a,b]$ et puisque $f = g \circ h$,on obtient la conclusion cherchée. □

5.2. Une généralisation d'un théorème de Saks et Sierpinski

En 1928, Saks et Sierpinski [S-S] démontrèrent que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, il existe une fonction mesurable $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall \epsilon > 0$, $|f(x) - \phi(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [0,1]$, sauf sur un ensemble de mesure intérieure nulle. Dans cette section, nous proposons une généralisation de ce théorème pour toute fonction $f : X \to Y$ où $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré avec une mesure σ-finie et une mesure extérieure μ^* régulière. De plus, Y sera un espace métrique séparable. Avant tout, pour un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, définissons la mesure intérieure μ_*d'un ensemble $A \subset X$ quelconque comme suit :

$$\mu_*(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) | \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset A, E_i \in \mathcal{T}\}$$

S'il existe un ensemble mesurable M tel que $A \subset M$ et tel que $\mu(M) < \infty$, on peut également affirmer que $\mu_*(A) = \mu(M) - \mu^*(A^c \cap M)$. Voici maintenant un premier lemme, précédé d'une proposition, relatif à la mesure intérieure dont nous nous servirons plus loin.

Proposition 5.2.1. *Soient $E \subset X$ un ensemble quelconque et $M \subset X$ un ensemble mesurable tel que $E \subset M$ et $\mu(M) = \mu^*(E)$. Pour tout sous-ensemble mesurable $D \subset X$, on a que $\mu(M \cap D) = \mu^*(E \cap D)$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, par monotonie de μ^*, on a évidemment que $\mu^*(E \cap D) \leq \mu(M \cap D)$ et que $\mu^*(E \cap D^c) \leq \mu(M \cap D^c)$. De plus, $\mu(M \cap D) = \mu(M) - \mu(M \cap D^c) \leq \mu^*(E) - \mu^*(E \cap D^c) \leq \mu^*(E \cap D)$. □

Lemme 5.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec une mesure σ-finie. Si $\mu^*(E) = \mu(X)$ pour un ensemble $E \subset X$, alors $\mu_*(E^c) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Supposons au contraire que $\mu_*(E^c) = k > 0$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, il existe un ensemble mesurable $M \subset E^c$ tel que $\mu(M) > 0$. Puisque μ est σ-finie, il est possible de trouver une suite $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables disjoints deux à deux tels que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Ainsi, $\mu(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M \cap D_n) > 0$ et $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(M \cap D_n) > 0$. Étant donné que $\mu(X \cap D_n) = \mu(D_n) = \mu(M \cap D_n) + \mu(M^c \cap D_n)$, alors $\mu(X \cap D_n) > \mu(M^c \cap D_n) \geq \mu^*(E \cap D_n)$ puisque $E \subset M^c$. Ceci est une contadiction, car en vertu de la proposition précédente et par hypothèse, on doit avoir que $\mu(X \cap D_n) = \mu^*(E \cap D_n)$. □

Nous présentons maintenant l'adaptation des trois lemmes que Saks et Sierpinski établirent dans leur article pour démontrer leur résultat principal. Les démonstrations présentées ici suivent passablement le même raisonnement que dans [S-S]. Cependant, nous avons dû faire des ajustements pour établir la généralisation.

Lemme 5.2.2. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec une mesure μ σ-finie. Soit $N \subset X$ et soient P, Q deux ensembles mesurables de X tels que $N \subset P$ et $N \subset Q$. Si $\mu(P) = \mu^*(N)$, alors $\mu(P - Q) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord qu'en vertu de la proposition 5.2.1, $\mu(P \cap D_n) = \mu^*(N \cap D_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ où $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles de mesure finie disjoints deux à deux tels que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $N \cap D_n \subset$

$P \cap Q \cap D_n$, alors $\mu^*(N \cap D_n) \leq \mu(P \cap Q \cap D_n) \leq \mu(P \cap D_n)$. Il en résulte que $\mu(P \cap Q \cap D_n) = \mu(P \cap D_n)$ et que $\mu(P - Q) = \mu((P - Q) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((P - Q) \cap D_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(P \cap D_n) - \mu(P \cap Q \cap D_n)) = 0$. □

Avant de démontrer le prochain lemme, rappelons qu'une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$ lorsque $(X, \mathcal{T}_1)$ et $(Y, \mathcal{T}_2)$ sont deux espaces mesurables.

Lemme 5.2.3. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$, un espace mesuré dont la mesure μ est σ-finie et dont la mesure extérieure associée μ^* est régulière. Soient $(Y, \mathcal{B}_Y)$, un espace métrique séparable et $A \subset X$. Pour toute fonction $g : A \to Y$ où $g(x)$ prend un nombre au plus dénombrable de valeurs, il existe une fonction $\phi : X \to Y$ mesurable telle que $g(x) = \phi(x)$, $\forall x \in H$ où $H \subset A$ et $\mu^*(H) = \mu^*(A)$.*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, on suppose que g prend un nombre dénombrable de valeurs. Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de toutes les valeurs que prend g. Posons $E_n = \{x \in A | g(x) = a_n\}$. Dans ce cas, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Puisque μ^* est régulière, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M'_n \in \mathcal{T}$ tel que $E_n \subset M'_n$ et $\mu(M'_n) = \mu^*(E_n)$. Construisons une suite d'ensembles mesurables $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $M_1 = M'_1$ et $M_n = M'_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$, si $n \geq 2$. Ainsi, $M_i \cap M_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Posons maintenant $H = \bigcup_{n=1}^{\infty}(M_n \cap E_n)$. Par hypothèse, $\exists M \in \mathcal{T}$ tel que $H \subset M$ et $\mu(M) = \mu^*(H)$. Par définition, $E_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} M_k$ et donc, $E_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c \subset M_n \cap E_n \subset M$. Plus explicitement, on a que $E_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c \subset M_n$ et que $E_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c \subset M$. En vertu de la proposition 5.2.1, on a que $\mu^*(E_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c) = \mu^*(M'_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c) = \mu(M_n)$ et donc, par le lemme précédent, $\mu(M_n \cap M^c) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que :

$$\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \cap M^c) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(M_n \cap M^c)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n \cap M^c) = 0 \quad (*)$$

De plus, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(M_n \cap M) + \bigcup_{n=1}^{\infty}(M_n \cap M^c)$. Ainsi, par (*), $\mu^*(A) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \mu(M) = \mu^*(H)$ et donc, $\mu^*(A) = \mu^*(H)$ puisque

$H \subset A$. Définissons maintenant la fonction $\phi : X \to Y$ telle que :

$$\phi(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x \in M_n, \\ a_1 & \text{si } x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)^c \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Puisque les M_n sont mesurables, alors ϕ est mesurable et de plus, $g(x) = \phi(x)$ si $x \in H$. Le lemme est ainsi démontré. □

Voici maintenant le dernier lemme avant le résultat principal de cette section.

Lemme 5.2.4. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré dont la mesure est σ-finie et dont la mesure extérieure associée μ^* est régulière. Soient $(Y, \mathcal{B}_Y)$ un espace métrique séparable et $A \subset X$. Pour toute fonction $f : A \to Y$ et $\forall \epsilon > 0$, il existe une fonction $\phi : X \to Y$ mesurable telle que pour l'ensemble $H = \{x \in A | d(f(x), \phi(x)) < \epsilon\}$, on a $\mu^*(H) = \mu^*(A)$.*

DÉMONSTRATION. Soient $\epsilon > 0$ et $D = \{d_1, d_2, ..., d_n, ...\}$, une partie dense et dénombrable de Y. Définissons la fonction $g : A \to Y$ telle que $g(x) := d_{\sigma(x)}$ où $\sigma(x) := \inf\{i \in \mathbb{N} | d_i \in B_\epsilon(f(x))\}$. Ainsi, $d(f(x), g(x))) < \epsilon$, $\forall x \in A$. Par définition, g prend une quantité au plus dénombrable de valeurs différentes et en vertu du lemme précédent, il existe une fonction $\phi : X \to Y$ mesurable telle que $g(x) = \phi(x)$, $\forall x \in H$ où $H \subset A$ et $\mu^*(H) = \mu^*(A)$. Il en résulte que $d(f(x), \phi(x)) < \epsilon$, $\forall x \in H$. □

Avant de démontrer la généralisation du théorème de Saks et Sierpinski, rappelons des théorèmes classiques de théorie de la mesure dont nous aurons besoin dans la preuve.

Rappel 5.2.1. *Soient $(X_1, \mathcal{B}_{X_1})$ et $(X_2, \mathcal{B}_{X_2})$ deux espaces topologiques. Toute fonction $f : X_1 \to X_2$ continue est mesurable.*

Rappel 5.2.2. *Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ trois espaces mesurables. Une fonction $f : X \to X_1 \times X_2$ est mesurable $\Leftrightarrow$ ses composantes $f_1 : X \to X_1$ et $f_2 : X \to X_1$ le sont.*

Rappel 5.2.3. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ et $(X_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables. Si les fonctions $f : X_1 \to X_2$ et $g : X_2 \to X_3$ sont mesurables alors $g \circ f : X_1 \to X_3$ l'est aussi.*

Rappel 5.2.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(Y, \mathcal{B}_Y)$ un espace métrique. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables admettant une limite $f : X \to Y$, alors f est mesurable.*

Voici finalement la généralisation du théorème.

Théorème 5.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré dont la mesure est σ-finie et dont la mesure extérieure associée μ^* est régulière. Soit $(Y, \mathcal{B}_Y)$ un espace métrique séparable . Pour toute fonction $f : X \to Y$, il existe une fonction $\phi : X \to Y$ mesurable telle que l'ensemble $\{x \in X | d(f(x), \phi(x)) < \epsilon\}$ est de mesure intérieure nulle.*

Démonstration. Tout d'abord, définissons inductivement une suite de fonctions mesurables $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On sait, en vertu du lemme précédent, qu'il existe une fonction $\phi_1 : X \to Y$ mesurable telle que pour l'ensemble $H_1 = \{x \in X | d(f(x), \phi_1(x)) < 1/2\}$, on a $\mu^*(H_1) = \mu(X)$. Supposons maintenant que nous avons défini ϕ_k pour $k = 1, 2, 3, ...n$. Par le lemme précédent, on sait qu'il existe une fonction $\phi_{n+1} : X \to Y$ mesurable telle que pour l'ensemble $H_{n+1} = \{x \in H_n | d(f(x), \phi_{n+1}(x)) < 1/2^{n+1}\}$, on a que $\mu^*(H_{n+1}) = \mu^*(H_n) = ... = \mu(X)$.

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(\phi_n(x), \phi_{n+1}(x)) < 1/2^{n-1}$ et ce, $\forall x \in H_{n+1}$. En vertu du rappel 5.2.2, l'application $(\phi_n, \phi_{n+1}) : X \to Y \times Y$ est mesurable. Puisque l'application métrique $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ est continue, en vertu des rappels 5.2.1 et 5.2.3, la fonction $g : X \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = d(\phi_n(x), \phi_{n+1}(x))$ est mesurable. Il en résulte que l'ensemble $P_n = \{x \in X | d(\phi_n(x), \phi_{n+1}(x)) < 1/2^{n-1}\}$ est mesurable et bien sûr, $H_{n+1} \subset P_n$. Posons $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k$. Ainsi, $d(\phi_n(x), \phi_{n+1}(x)) < 1/2^{n-1}$, $\forall x \in P$. Il en résulte que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m > N$, alors $d(\phi_n(x), \phi_m(x)) < \epsilon$. Donc, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, $\forall x \in P$, vers une fonction $\phi_P : P \to Y$. Soit y_0, un point quelconque de Y. Définissons les applications $\phi'_n : X \to Y$ telles que :

$$\phi'_n(x) = \begin{cases} \phi_n(x) & \text{si } x \in P, \\ y_0 & \text{si } x \in X - P \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Ces applications sont mesurables puisque P est mesurable et elles convergent vers la fonction $\phi\ : X \to Y$ définie comme suit :

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_P(x) & \text{si } x \in P, \\ y_0 & \text{si } x \in X - P \end{cases} \tag{5.2.3}$$

En vertu du rappel 5.2.4, ϕ est mesurable. Puisqu'il existe un N tel que $d(\phi(x), \phi_N(x)) < 1/2^n$, $\forall x \in P$, il en résulte que pour $n > N$,

$$d(\phi(x), \phi_n(x)) \leq d(\phi(x), \phi_N(x)) + d(\phi_N(x), \phi_n(x)) < 1/2^{n-2}$$

et ce, pour tout $x \in P$. Ainsi, $(f(x), \phi(x)) < 1/2^{n-3}$, $\forall x \in P \cap H_n$. Pour un $\epsilon > 0$ donné, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^{n-3} < \epsilon$ et donc, $(\phi(x), f(x)) < \epsilon$, $\forall x \in P \cap H_n$.

Montrons finalement que $P^c \cup H_n^c$ est de mesure intérieure nulle. D'abord remarquons que $P^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^c$. Puisque $H_{n+1} \subset H_n \subset ... \subset H_1$ et que $H_{n+1} \subset P_n$, alors $\bigcup_{k=1}^{n} P_k^c \subset H_{n+1}^c$. Ainsi, P^c est de mesure nulle car sinon, il existerait un $j \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{k=1}^{j} P_k^c$ est de mesure positive. Ceci est absurde étant donné que H_{j+1} ne peut pas être de mesure intérieure positive en vertu du lemme 5.2.1. Il en découle que $P^c \cup H_n^c$ doit être de mesure intérieure nulle car sinon, il existerait un ensemble mesurable $E \subset P^c \cup H_n^c$ de mesure positive et donc, $E \cap P$ serait également de mesure positive. Puisque $E \cap P \subset H_n^c$, alors H_n^c serait de mesure intérieure positive et cela contredirait le lemme 5.2.1. $\square$

Rappelons que la mesure extérieure que nous avons construite à la section 2.2 est régulière et que la mesure lui étant associé est σ-finie. Ainsi, le théorème précédent est valide lorsque $(X, \mathcal{B}_X)$ est un espace métrique séparable muni de la mesure construite dans le second chapitre.

5.3. Applications du théorème de Saks et de Sierpinski

À partir du théorème de Saks et de Sierpinski généralisé à la section précédente, il est possible d'étendre des théorèmes d'approximation de fonctions mesurables à des fonctions arbitraires avec de légères modifications apportées à l'énoncé. Ainsi, dans cette section, nous présentons deux autres propriétés pour toute fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La première découle d'un théorème de Borel [B-1] dont il affirmait qu'il s'appliquait à des « fonctions définissables analytiquement ».

Ce résultat fut cependant reformulé par Sierpinski [S-1] pour des fonctions mesurables. Avant de démontrer ce théorème, rappelons le fameux théorème d'approximation de Weierstrass dont on peut trouver une preuve simple dans [Ly] et présentons un lemme dont nous nous servirons.

Théorème 5.3.1. *(Théorème d'approximation de Weierstrass) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe un polynôme $p_\epsilon(x)$ tel que $|f(x)-p_\epsilon(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.*

Lemme 5.3.1. *$\forall \epsilon > 0$, une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mesurable est bornée sauf sur un ensemble de mesure inférieure à ϵ.*

DÉMONSTRATION. Soit $E_n = \{x \in [a,b] | n-1 \leq |f(x)| < n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et $(b-a) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ étant donné que les ensembles E_n sont mesurables et deux à deux disjoints. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ est convergente, alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) < \epsilon$. Il en résulte que $|f(x)| < N$, $\forall x \in \bigcup_{n=1}^{N} E_n$ où $m([a,b] - \bigcup_{n=1}^{N} E_n) < \epsilon$. □

Théorème 5.3.2. *(Borel) $\forall \epsilon > 0$ et pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mesurable, il existe un polynôme $P_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $H_\epsilon := \{x \in [a,b] || f(x) - P_\epsilon(x)| \geq \epsilon\}$ est de mesure inférieure à ϵ.*

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$. En vertu du lemme précédent, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a,b] - Q$ où $m(Q) < \epsilon/2$. Ainsi, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $M < p\epsilon/2$. Posons $P_n = \{x \in [a,b] | (n-1)\epsilon/2 \leq f(x) < n\epsilon/2\}$ où $n \in \{1-p, 2-p, ..., p\}$. On a alors que $[a,b] = Q + \bigcup_{n=1-p}^{p} P_n$. Puisque f est mesurable, alors les P_n sont mesurables et donc, il existe un ensemble fermé $F_n \subset P_n$ tel que $P_n = F_n \cup R_n$ et que $m(R_n) < \epsilon/2p$. Ainsi, $F = \bigcup_{n=1-p}^{p} F_n$ est fermé et $[a,b] - F = Q + \bigcup_{n=1-p}^{p} R_n$. Il en résulte que $m([a,b] - F) \leq m(Q) + \sum_{n=1-p}^{p} m(R_n) < \epsilon/2 + 2p(\epsilon/2p) = \epsilon$.

Puisque les F_n sont fermés, il est possible de définir une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(x) = (n-1)\epsilon/2$ si $x \in F_n$ et telle que ϕ est linéaire sur les intervalles contigus à F. Ainsi, ϕ est continue sur $[a,b]$ et on a que $0 \leq f(x) - \phi(x) < \epsilon/2$. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe un polynôme $P_\epsilon(x)$

tel que $|\phi(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon/2$, $\forall x \in [a,b]$. Ainsi, $\forall \epsilon > 0$, il existe un polynôme $P_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon$ excepté sur l'ensemble $H_\epsilon := [a,b] - F$ où $m(H_\epsilon) < \epsilon$. □

Voici la première application.

Théorème 5.3.3. *$\forall \epsilon > 0$ et pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, il existe un polynôme $P_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $H_\epsilon := \{x \in [a,b] \| f(x) - P_\epsilon(x)| \geq \epsilon\}$ est de mesure intérieure inférieure à ϵ.*

DÉMONSTRATION. Soient $\epsilon > 0$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En vertu du théorème 5.2.1, il existe une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mesurable telle que l'ensemble $H_{1\epsilon} := \{x \in [a,b] \| f(x) - \phi(x)| \geq \epsilon/2\}$ a une mesure intérieure nulle. De plus, par le théorème précédent, il existe un polynôme $P_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $H_{2\epsilon} := \{x \in [a,b] \| \phi(x) - P_\epsilon(x)| \geq \epsilon/2\}$ est de mesure inférieure à $\epsilon/2$. On a donc que $|f(x) - P_\epsilon(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b] - (H_{1\epsilon} \cup H_{2\epsilon})$. Il reste à montrer que la mesure intérieure de $H_\epsilon := H_{1\epsilon} \cup H_{2\epsilon}$ est inférieure à ϵ.

Supposons au contraire que $m_*(H_\epsilon) \geq \epsilon$. Dans ce cas, il existe un ensemble mesurable $M \subset H_\epsilon$ tel que $m(M) \geq \epsilon$. Par contre, $m(M) = m(M \cap H_{2\epsilon}) + m(M \cap H_{2\epsilon}^c) < \epsilon/2 + m(M \cap H_{2\epsilon}^c)$ et donc, $m(M \cap H_{2\epsilon}^c) \geq \epsilon/2$. Puisque $M \cap H_{2\epsilon}^c \subset M \cap H_{1\epsilon}$, il en résulterait que $H_{1\epsilon}$ a une mesure intérieure positive, ce qui est absurde. □

Abordons maintenant la deuxième application qui est relative aux fonctions de deuxième classe de Baire. Dans un article publié en 1906, René Baire [Ba-2] démontra un résultat fort intéressant qui permet de bien caractériser les fonctions de classe 1 dont nous avions donné la définition à la page 16.

Théorème 5.3.4. *(Baire) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe 1 $\Leftrightarrow$ l'ensemble des discontinuités de f est de première catégorie.*

Avec l'aide de ce théorème, nous pouvons démontrer un résultat provenant de Vitali [V]. Par contre, notre preuve est inspirée de celle de Sierpinski [S-1]. Ce théorème nous conduira à la deuxième application.

Théorème 5.3.5. *(Vitali) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable, il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe inférieure ou égale à 2 telle que l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \neq f(x)\}$ est de mesure nulle.*

DÉMONSTRATION. Soit $k \in \mathbb{Z}$. En vertu du théorème 5.3.2, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_{nk}(x)$ tel que l'ensemble $H_{nk} := \{x \in [k, k+1] || f(x) - P_{nk}(x)| \geq 1/2^n\}$ a une mesure inférieure à $1/2^n$. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f_n(x) := \begin{cases} P_{nk}(x) & \text{si } x \in \bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Puisque $\bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk}$ est fermé, alors f_n est continue en $int((k, k+1) - \bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk})$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $D(f_n) \subset \mathbb{Z} + \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\overline{(k, k+1) - \bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk}} - int((k, k+1) - \bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk}))$ où $D(f_n)$ représente l'ensemble des discontinuités de f_n. Il en résulte que $D(f_n)$ est de première catégorie et en vertu du théorème de Baire, f_n est de classe 1, $\forall n \in \mathbb{N}$. On remarque que $m([k, k+1] - \bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk}) \leq \sum_{j=n}^{\infty} m([k, k+1] - H_{kj}) < 1/2^n + 1/2^{n+1} + ... = 1/2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $m([k, k+1] - \bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk}) = 0$ et $S = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\bigcap_{j=n}^{\infty} H_{jk})$ est de mesure nulle.

Remarquons également que :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin S, \\ 0 & \text{si } x \in S \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Ainsi, la suite de fonction $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une certaine fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est de deuxième classe par définition. On a bien que $g(x) = f(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle. □

Théorème 5.3.6. *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe inférieure ou égale à 2 telle que l'ensemble $H_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} || f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}$ est de mesure intérieure nulle.*

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème 5.2.1, il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que l'ensemble $H_{1\epsilon} := \{x \in [a, b] || f(x) - \phi(x)| \geq \epsilon\}$ a une mesure intérieure nulle. De plus, par le théorème précédent, il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to$

$\mathbb{R}$ de classe inférieure ou égale à 2 telle que l'ensemble $H_{2\epsilon} = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \neq \phi(x)\}$ est de mesure nulle. On a donc que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$, $\forall x \in \mathbb{R} - (H_{1\epsilon} \cup H_{2\epsilon})$. Il reste à montrer que la mesure intérieure de $H_\epsilon := H_{1\epsilon} \cup H_{2\epsilon}$ est nulle.

Supposons au contraire que $m_*(H_\epsilon) > 0$. Dans ce cas, il existe un ensemble mesurable $M \subset H_\epsilon$ tel que $m(M) > 0$. Par contre, $m(M) = m(M \cap H_{2\epsilon}) + m(M \cap H_{2\epsilon}^c) = m(M \cap H_{2\epsilon}^c)$ et donc, $m(M \cap H_{2\epsilon}^c) > 0$. Puisque $M \cap H_{2\epsilon}^c \subset M \cap H_{1\epsilon}$, il en résulterait que $H_{1\epsilon}$ a une mesure intérieure positive, ce qui est absurde. $\square$

Dans son article intitulé "The measurable boundaries of an arbitrary function" [Bl-3], Henry Blumberg avait également abouti aux deux applications que nous venons de présenter. Cependant, il y arriva en définissant pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux applications qu'il considéra comme étant les « frontières mesurables inférieures et supérieures » de f. Il démontra que ces applications, toujours « très près » de la fonction f lorsqu'on néglige un ensemble de mesure nulle, sont mesurables. Cependant, son raisonnement est quelque peu long et tortueux et nous avons préféré passer par le théorème de Saks et Sierpinski, étant donné que contrairement à celui de Blumberg, il était généralisable.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ALAS, O. T., *On Blumberg's theorem*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 60 (1976), no. 5, p. 579-582.

[Ba-1] BAIRE, R., *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Math. t.III (1899), p.181.

[Ba-2] BAIRE, R., *Sur la représentation des fonctions discontinues*, Acta Math. 30 (1905), p.1-48.

[Be] BENNETT, H. R., *Real-valued functions on certain semi-metric spaces*, Compositio Math. 30 (1975), p. 137-144.

[Ber] BERNOULLI, JOH., Opera omnia, I-IV. Lausanne et Genevae (1742)

[Bl-1] BLUMBERG, H., *New properties of all real functions*, Trans. A.M.S. (1923), p.113-128.

[Bl-2] BLUMBERG, H., *A theorem on arbitrary functions of two variables with applications*, Fund. Math. 16 (1930), p. 17-24.

[Bl-3] BLUMBERG, H., *The measurable boundaries of an arbitrary function*, Acta Math. 65 (1935), p.263-282.

[B-1] BOREL, É., , C. R. Acad. Sc. Paris 154 (1912), p.415.

[B-2] BOREL, É., *Le calcul des intégrales définies*, Journ. Math. Pures Appl. 6 (1912), vol. 8, p.208.

[B-3] BOREL, É., *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions*, Paris (1922), p.67.

[C-Yg] YOUNG, G. C., *A note on derivates and differential coefficients*, Acta Math. 37 (1914), p. 143.

[C-1] CAUCHY, A., *Oeuvres completes*, 1ere serie, Tome 8, Paris (1897), p.145-149.

[C-2] CAUCHY, A., *Oeuvres completes*, 2e serie, Tome 3, Paris (1897).

[Da] DARBOUX, G., *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. Sci. École Norm. sup., 2e série 4 (1875), p.57-112.

[D] DELACHET, A., *L'Analyse mathématique*, Presses universitaires de France, Paris (1958), p.37.

[E] ESANU, M., *Une généralisation des théorèmes de A. Froda et Yu. Y. Prokhorov concernant les points de discontinuité de la première espèce*, Stud. Cerc. Mat. 44 (1992), no. 4, p. 297-299.

[Eu] EULER, L., *De l'utilisation des fonctions continues en analyse*, dans DHOMBRES, J., *Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie (1988), no. 9, p.34-35.

[Fa] FAST, H., *Une remarque sur la propriété de Weierstrass*, Colloq. Math. VII (1959), p.75-77.

[Fo] FOURIER, J. B., *Oeuvres*, v.I, publié par G. Darboux. Paris (1888), p.500.

[F-1] FRODA, A., *Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables reelles*, Thèse 111 p. Paris, Hermann. (1929).

[F-2] FRODA, A., *Sur la distribution des discontinuités des fonctions réelles*, Com. Acad. R. P. Romîne 5 (1955), p.31-36.

[Gi] GIROUX, A., *Notes de cours MAT 6111*, Université de Montréal (2001), 111 pages.

[Go] GOFFMAN, C., *Real functions*, Rinehart, New York (1963).

[Hn] HALPERIN, I., *Discontinuous functions with the Darboux property*, Canad. Math. Bull. 2 (1959), p.111-118.

[Ha] HANKEL, H., *Recherches sur les fonctions ayant une infinité d'oscillations et sur les fonctions discontinues*, texte traduit de l'allemand par J. PEIFFER Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie (1988), no. 9, p.144.

[H] HEATH, R. W., *Arc-wise connectedness in semi-metric spaces*, Pacific J. Math. 12 (1962), p. 1301-1309.

[K] KURATOWSKI, K., *Topology*, Academic Press, NY (1966).

[La] LACROIX, S. F., *Traité du calcul différentiel et intégral*, t.1, Paris (1797), p.1.

[Lag] LAGRANGE, J. L., *Théorie des fonctions analytiques*, Paris (1797), p.1.

[L-1] LEBESGUE, H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars (1904).

[L-2] LEBESGUE, H., *À propos de quelques travaux mathématiques récents*, Enseignement Math. 17 (1971), p.1-48.

[Lm] LINDENBAUM, A., , Ann. Soc. Math. Pol. 6 (1927), p. 129-130.

[Ly] LINDSEY, J. H., II, *A simple proof of the Weierstrass approximation theorem*, Amer. Math. Monthly 98 (1991), no. 5, p.429-430.

[M-1] MARCUS S., *La superposition des fonctions et l'isométrie de certaines classes de fonctions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine (N.S.) 1(49) (1957), p.69–76.

[M-2] MARCUS, S., *Sur la représentation d'une fonction arbitraire par des fonctions jouissant de la propriété de Darboux*, Trans. A. M. S. 95 (1960), p.489-494.

[M-3] MARCUS, S., *Sur une propriété appartenant à toutes les fonctions réelles d'une variable réelle*, Indian J. Math. 9 (1967), p.457-460.

[Mo] MONNA, A. F., *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue*, Arch. for History of Exact Sciences 9 (1972), p.57-84.

[Mk] MUNKRES, J. R., *Topology : a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1975).

[Mn] MUNROE, M. E., *Measure ans inegration*, 2nd ed., Reading, Mass., Addition-Wesley, Don Mills, Ont. (1971).

[N] NEUGEBAUER, C. J., *Darboux property for functions of several variables*, Trans. A. M. S. 107 (1963), p.30-37.

[R] RUDIN, W., *Principles of mathematical analysis*, N.Y., McGraw-Hill Toronto (1964).

[S-S] SAKS, S., SIERPINSKI, W., *Sur une propriété générale de fonctions*, Fund. Math. 11 (1928), p.105-112.

[Sa] SARKHEL, D. N., *A generalization of the Vitali covering theorem*, Fund. Math. 97 (1977), no. 3, p.151-156.

[Sch] Schlomiuk, N. , Montini, E., *Fonctions continues et fonctions continues à la Darboux : une approche historique*, Gazette des sciences mathématiques du Québec 17 (1995), no. 1, p.44-56.

[Se] Sebestik, I., *Bernard Bolzano et son mémoire sur le théoreme fondamental de l'analyse*, Revue d'histoire des sciences appliquées 17 (1964), p.136-164.

[S-1] Sierpinski, W., *Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables*, Fund. Math. 3 (1922), p.314-321.

[S-2] Sierpinski, W., *Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative*, Fund. Math. 4 (1923), p. 124-127.

[S-3] Sierpinski, W., *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques*, Mathematiche 8 (1953), p.43-48.

[S-Z] Sierpinski, W. , Zygmund, A., *Sur une fonction qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu*, Fund. Math. 4 (1923), p. 316-318.

[So] Solomon D. W., *On separation in measure and metric density in Romanovski spaces*, Duke Math. J. 36 (1969), p.81-90.

[V] Vitali, G., Rend. Lomb. 38 (1905), p.599.

[Yg] Young, W. H., *La symétrie de structure des fonctions de variables réelles*, Bulletin sc. math. (2) 52 (1928), p. 265-280.

[Y] Youschkevitch, A. P., *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, Arch. History Exact Sci. 16 (1976/77), no. 1, p.37-85.

[Za] Zajicek, L., *On the symmetry of Dini derivates of arbitrary functions*, Comment. Math. Univ. Carolin. 22 (1981), no. 1, p.195-209.